VIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 22-25 марта 2016 г.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Первый день.***

**1.** В одной деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник каждому жителю деревни задал два вопроса: "Сколько в деревне рыцарей?" и "На сколько отличаются количества рыцарей и лжецов?" Путешественник знает, что в деревне есть хотя бы один рыцарь. Всегда ли по полученным ответам путешественник сможет узнать, кто из жителей деревни рыцарь, а кто — лжец? (С. Берлов)

**2.** В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём *треугольником* три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника. (И. Богданов, Д. Карпов)

**3.** Дан равносторонний треугольник *ABC*. Точка *D* выбрана на продолжении стороны *AB* за точку *A*, точка *E* — на продолжении *BC* за точку *C*, а точка *F* — на продолжении *AC* за точку *C* так, что *CF* = *AD* и *AC*+*EF* = *DE*. Найдите угол *BDE*. (А. Кузнецов)

**4.** Даны 2*n*-значное натуральное число *a* и натуральное число *k*. Числа *a* и *ka* записали на ленте и каждую из двух записей разрезали, начиная с последних цифр, на двузначные числа (при этом числа 00, 01, …, 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе *ka* оказалось нечетное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа *a* полученные двузначные числа строго убывают справа налево (от младших разрядов числа *a* к старшим), а у числа *ka* ⎯ строго возрастают. Докажите, что *k* ≥ *n*. (О. Нечаева, С. Берлов)

VIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 22-25 марта 2016 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Второй день.***

**5.** Можно ли прямоугольник 1000×2016 разрезать на прямоугольники 1×2015 и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов? (Е. Бакаев)

**6.** В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого *i* = 1, 2, ..., 30 обозначим через *ni* количество детей, занимающихся ровно в *i* кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа *ni* для этих новых кружков были бы теми же самыми. (В. Дольников)

**7.** Сумма неотрицательных чисел *a*, *b*, *c* и *d* равна 4. Докажите, что (*ab*+*cd*)(*ac*+*bd*)(*ad*+*bc*) ≤ 8. (А. Храбров)

**8.** Дан параллелограмм *ABCD*. На сторонах *AB* и *BC* и продолжении стороны *CD* за точку *D* выбраны соответственно точки *K*, *L* и *M* так, что треугольники *KLM* и *BCA* равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок *KM* пересекает отрезок *AD* в точке *N*. Докажите, что *LN* || *AB*. (Б. Обухов)