IX олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Можно ли за каждую цифру от 0 до 9 назначить цену так, чтобы все 10 цен были различны и нашлись 20 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых, кроме первого, стоит дороже предыдущего? Здесь цена натурального числа — это сумма цен цифр в его записи.* (И. Рубанов+жюри)

Ответ. Можно. **Решение**. Пусть цифры 0, 1, ..., 9 стоят 20, 21, ..., 29 рублей соответственно. Тогда числа 90, 91, ..., 99, 100, ..., 109 стоят, соответственно, 49, 50, ..., 58, 61, 62, ..., 70 рублей.

Замечание. Если заменить в условии задачи 20 на 21, ответ станет отрицательным.

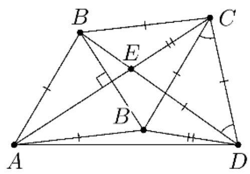
2. *График* $y = x + b\sqrt{x} + c$, *где* $c > 0$, *имеет с осью ординат общую точку* C, *а ось абсцисс пересекает в точках* X_1 *и* X_2. *Обозначим через* O *начало координат. Докажите, что* $\angle CX_1O + \angle CX_2O = 90°$. (А. Шкловер)

Решение. Достаточно проверить, что $\angle CX_1O = 90° - \angle CX_2O = \angle OCX_2$, то есть что прямоугольные треугольники COX_1 и X_2OC подобны.

Пусть точки X_1 и X_2 имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно. Тогда x_1 и x_2 — корни уравнения $x+b\sqrt{x}+c = 0$. Точка C имеет координаты $(0, c)$. Заметим, что $x_1, x_2 > 0$, так как при $x < 0$ выражение $\sqrt{x}$ не имеет смысла, а нулю корень равняться не может, так как $c > 0$.

Подобие треугольников COX_1 и X_2OC означает, что $OC/OX_1 = OX_2/OC$, что равносильно равенству $c/x_1 = x_2/c$, то есть $x_1x_2 = c^2$ (*). Рассмотрим квадратное уравнение $y^2+by+c = 0$. Его корни равны $\sqrt{x_1}$ и $\sqrt{x_2}$. По теореме Виета имеем $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = c$. Возводя это равенство в квадрат, получаем равенство (*), откуда и следует утверждение задачи.

3. *Диагонали выпуклого четырехугольника* $ABCD$ *пересекаются в точке* E. *Известно, что* $AB = BC = CD = DE = 1$. *Докажите, что* $AD < 2$. (А. Кузнецов)



Первое решение. Заметим, что $\angle CED < 90°$, потому что это угол при основании равнобедренного треугольника CDE. Значит, $\angle BEC > 90°$, поэтому $BC > CE$. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно прямой AC. Поскольку $BC = CD = DE$, $\angle B'CD = \angle DCE - \angle B'CE = \angle CED - \angle BCE = \angle CBE = \angle CDE$. Также $AB' = CB' = CD = 1$. Тогда треугольники DCB' и EDC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $B'D = CE$. Таким образом, $AD \le AB'+B'D = 1+CE < 1+BC = 2$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Положим $\angle EDC = 2\alpha$, $\angle EDA = \beta$, $\angle EAD = \gamma$. Поскольку $BC = CD = DE$, имеем $\angle CBE = 2\alpha$ и $\angle CED = \angle DCE = 90° - \alpha$. Так как угол CED — внешний для треугольника BEC, $\angle BCE = 90° - \alpha - 2\alpha = 90° - 3\alpha$, откуда $\angle BAC = 90° - 3\alpha$ и $\angle ABE = 180° - \angle BAE - \angle BEA = 180° - (90° - \alpha) - (90° - 3\alpha) = 4\alpha$.

Предположим, что $AD \ge 2$. Тогда $AE+ED > 2$. Значит, $AE > 1 = AB$. Следовательно $\angle ABE > \angle AEB$, то есть $4\alpha > 90° - \alpha$, откуда $5\alpha > 90°$. Также $AE > ED$, поэтому $\beta > \gamma$. Поскольку $\angle CED = 90° - \alpha$ внешний для треугольника AED, $90° - \alpha = \beta+\gamma < 2\beta$.

Заметим, что $AD \ge AB+BC > AC$. Значит, $\angle ACD < \angle ADC$, то есть $90° - \alpha > 2\alpha+\beta$. Тогда $180° - 2\alpha > 4\alpha+2\beta > 90°+3\alpha$, откуда следует, что $90° > 5\alpha$. Получили противоречие с ранее доказанным неравенством $5\alpha > 90°$. Таким образом, $AD < 2$, что и требовалось доказать.

4. *У Зевса имеются весы, позволяющие узнавать вес положенного на них груза, и мешок со 100 монетами, среди которых есть 10- и 9-граммовые. Зевсу известно общее число* N *10-граммовых монет в мешке, но неизвестно, какие именно сколько весят. Он хотел бы сделать четыре взвешивания на весах и в результате гарантированно найти хотя бы одну 9-граммовую монету. При каком наибольшем* N *это возможно?* (К. Кноп)

Ответ. При $N = 15$. **Решение**. Сначала приведём алгоритм действий Зевса при $N = 15$. Взвешивая какое-то количество монет, он по суммарному весу сразу выясняет количество тяжёлых среди взвешенных. Поскольку ему достаточно определить всего одну лёгкую монету, то он может в первый раз взвесить всего 8 монет. Если среди них есть легкие, то он продолжает взвешивать эти же монеты (а про все прочие забывает), а иначе Зевс делает вывод, что среди остальных монет не более семи тяжёлых, и дальше взвешивает уже другие монеты. В любом случае, на втором взвешивании ему достаточно взвесить четыре монеты, на третьем — две, а на четвёртом — одну.

Теперь докажем, что при $N > 15$ задача, стоящая перед Зевсом, неразрешима. Для этого рассмотрим Антизевса, который после того, как Зевс положил какие-то монеты на весы в первом взвешивании, решает, каким же будет вес этих монет. Антизевс старается помешать Зевсу, поэтому его действия таковы:

– если Зевс взвесит не менее 8 и не более $108–N$ монет, то Антизевс делает тяжёлыми ровно 8 из них;

– если Зевс взвесит менее 8 монет, то Антизевс сделает тяжёлыми все эти монеты,

– если Зевс взвесит более $108–N$ монет, то Антизевс сделает тяжёлыми все невзвешенные.

Ясно, что при $N > 15$ Антизевс добился следующего: каким бы ни было выбранное Зевсом распределение монет на две группы (взвешенные/невзвешенные), в каждой из групп, состоящей из не менее чем 8 монет, есть хотя бы 8 тяжёлых.

На втором ходу Антизевс поступает аналогично: теперь каждая из предыдущих групп разделилась на две части (принимавшие участие во втором взвешивании и не участвовавшие в нем), и Антизевс добивается того, чтобы в каждой из четырех групп было не менее четырех тяжёлых (или все тяжёлые, если в группе менее 4 монет). После третьего взвешивания Антизевс аналогично отслеживает 8 получившихся у Зевса групп монет, обеспечивая, чтобы в каждой группе, состоящей хотя бы из двух монет, было не менее двух тяжёлых. И, наконец, на четвертом ходу Антизевс добивается того, чтобы в каждую из непустых групп (которых не более 16) попала хотя бы одна тяжёлая монета. Поскольку Зевс не знает про каждую такую группу ничего, кроме ее общего веса, то он не сможет отличить в этой группе тяжелую монету от легкой, а значит, не сможет гарантированно определить ни одной легкой монеты.

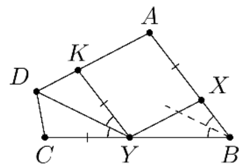
IX олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, ..., 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, ..., 99?* (С. Берлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Из условия следует, что все остатки от деления числа a на числа от 1 до 1000 меньше 100. Пусть остаток от деления числа a на 100 равен r. Тогда при делении a на любое число, кратное 100, должен получаться остаток вида $r+100k$, где k — неотрицательное целое число. Так как по условию остатки от деления a на 200, 300, ..., 900, 1000 не превосходят 99, все они тоже равны r. Но тогда такой же остаток получится и при делении a на любой делитель тысячи, больший 100, например, на 250. Таким образом, остаток r должен встречаться по крайней мере 11 раз, что противоречит условию задачи.

6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы A и C равны 100°. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что AX = CY. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.* (А. Кузнецов, С. Берлов)



Решение. Проведём через точку Y прямую, параллельную AB. Пусть она пересечёт AD в точке K. Тогда $\angle DYC = \angle DYK$ и $\angle C = 100° = \angle BAD = \angle YKD$, поэтому треугольники DYC и DYK равны по двум углам и стороне. Поэтому $YK = YC = AX$ и $AXYK$ — параллелограмм. Но тогда $\angle AXY = \angle AKY = 80°$.

7. *Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?* (К. Кноп)

Ответ. Нельзя. **Решение**. 10 точек разбивают окружность на 90 дуг. Мы должны получить 45 дуг различной нечётной длины. Так как четных дуг 44, то дуг нечётной длины не более 90–44 = 46, при этом дуга длины 45 не может быть единственной, потому что это полуокружность. Следовательно, нам нужны ровно 46 нечётных дуг.

Возьмём любую из 10 точек в качестве начала отсчёта. Если дуга от нее до i-ой точки нечётна, то i-ую точку назовём *нечётной*, а в противном случае — *чётной*. Если всего есть k нечетных точек и $10–k$ чётных (включая начало отсчёта), то нечётные длины дуг будут ровно между нечётными и чётными точками, то есть их количество равно $2k(10–k)$. Но уравнение $2k(10–k) = 46$ не имеет целых решений, так как 23 — простое число, поэтому выбрать нужным образом 10 точек невозможно.

Замечание. На окружности длины 91 поставить 10 точек, обеспечив все различные дуги от 1 до 90, возможно. Одно из решений — перечислены расстояния между соседними точками — (1, 5, 4, 13, 3, 8, 7, 12, 2, 36).

8. *Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида* $\frac{a-n^2}{4}$*, где n — натуральное число. Оказалось, что при* $n \le \sqrt{a/5}$ *все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице.* (А. Храбров)

Решение. Если a при делении на 4 дает 3, на доске вообще нет целых чисел, потому что квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 или 1. В этом случае утверждение задачи, очевидно, верно. Дальше считаем, что a дает при делении на 4 остаток 1. Тогда $a = 4p+1$, где $p = \frac{a-1}{4}$ — простое. Заметим, что число $\frac{a-n^2}{4}$ тут является целым тогда и только тогда, когда n нечётно. Поскольку при нечётном n разность $p - \frac{a-n^2}{4} = \frac{n^2-1}{4}$ чётна, все целые числа вида $\frac{a-n^2}{4}$ здесь нечётны.

Пусть для некоторого a условие задачи выполнено, а заключение — нет. Рассмотрим наименьшее такое n, что число $b = \frac{a-n^2}{4}$ — составное. Обозначим через u его наименьший простой делитель. Так как $n > \sqrt{a/5}$, выполнено неравенство $b = \frac{a-n^2}{4} < a/5$. Поэтому $u < \sqrt{\frac{a}{5}} < n$, откуда $-n < n-2u < n$. Значит, $(n-2u)^2 < n^2$, причём $n-2u$ не равно 0, так как n нечётно. Легко видеть, что число $\frac{a-(n-2u)^2}{4}$ натуральное, делится на u и больше b, то есть оно не простое и не единица, Следовательно, число $|n-2u|$, меньшее,чем n, также порождает составное натуральное число, что противоречит минимальности n.

Замечание. Условие задачи выполнено, например, для $a = 173$.