**XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап**

**Решения заданий первого дня.**

**1.** *На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.* (С. Берлов)

**Решение**. Пронумеруем написанные числа по возрастанию: *a*1 ≤ *a*2 ≤ *a*3 ≤ *a*4. Если *a*2–*a*1 < (*a*3+*a*4)/3, то все доказано. В противном случае *a*2 > *a*2–*a*1 ≥ (*a*3+*a*4)/3 ≥ 2*a*3/3, откуда *a*3–*a*2 < *a*3/3 ≤ *a*4/3 < (*a*4+*a*1)/3.

**2.** *В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть популярной. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.* (С. Берлов)

**Решение**. Докажем, что из любой популярной группы, состоящей более, чем из 49 ребят, можно кого-то удалить так, что группа останется популярной. Пусть все приехавшие имеют ровно по *k* знакомых. Рассмотрим какую-то популярную группу *A*, в которую входит не менее 50 школьников. Будем считать, что все остальные школьники входят в группу *B*. Предположим, что при удалении из *A* любого школьника она перестаёт быть популярной. Тогда школьники из этой группы делятся на тех, для каждого из которых найдётся кто-то из *B*, знакомый только с ним — назовём эту группу *A*1 — и остальных, которые знакомы только со школьниками из *B* (и потому, попав после удаления из группы *A* в группу *B*, оказываются незнакомы ни с кем из *A*) — назовём эту группу *A*2. Каждому школьнику из группы *A*1 сопоставим одного школьника из *B*, который знаком только с этим школьником из *A*1. Они образуют группу *B*1. Пусть остальные школьники из *B* образуют группу *B*2. Пусть |*X*| означает число элементов во множестве *X*. Все школьники из *A* суммарно имеют не менее |*A*1|+*k*|*A*2| знакомств в *B*. С другой стороны, школьники из *B* суммарно имеют не более |*B*1|+*k*|*B*2| знакомств в *A*. Значит, |*A*1|+*k*|*A*2| ≤ |*B*1|+*k*|*B*2| Но поскольку |*A*1| = |*B*1|, а |*A*2|≥ 50–|*A*1| > 49–|*B*1| = |*B*2|, получаем, что |*A*1|+*k*|*A*2| > |*B*1|+*k*|*B*2| — противоречие.

**3.** *Дан треугольник ABC, в котором 2B – A = 180°. Внутри него выбрана точка K, а на его стороне AB — точка L ≠ B так, что ACK = 2BCK и BK = KL. Докажите, что CK+AL = AC.* (И. Богданов)

**Решение**. Обозначим *A* = 2α, *C* = 3γ, *B* = π−β. Тогда из условия вытекает, что β = 2α+3γ = 90−α, откуда α+γ = 30, β−γ = 60 и α+β = 90.

Отложим на луче *AB* такой отрезок *AP*, что *AP* = *AC*. Достаточно доказать, что *CK* = *PL*. Опустим перпендикуляры: *CH* — на *AP*, *KT* — на *CH*, *KM* — на *AB*. Заметим, что *CPB* = 90–α = β = *PBC*, откуда *PH* = *BH*. Кроме того, из равенства *BK* = *KL* следует, что *LM* = *MB*. Поэтому *KT* = *MH* = *LP*/2. Заметим теперь, что *KCB* = *C*/3 = γ, и потому *KCT* = γ+α = 30, откуда *CK* = 2*KT* = *PL*, что и требовалось доказать.

**4.** *Натуральные числа a1, a2, …, ak (k < 2020) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.* (С. Кудря)

**Решение**. Заметим прежде всего, что чисел, меньших числа 211 = 2048 и взаимно простых с ним ровно 1024, поэтому по теореме Эйлера 1024-ая степень нечетного числа при делении на 2048 дает остаток 1. Пусть среди наших чисел есть четное число *ai*. Тогда его 1024-ая степень делится на 211. Поскольку единицами в количестве, не большем *k* < 2020 < 211, число, делящееся на 211, не набрать, числа, сумма 1024-ых степеней которых делится на 1024-ую степень числа *ai*, все четны. Тогда мы можем удалить из нашего набора все нечетные числа, а все четные разделить на 2. Получится новый набор менее чем из 2020 чисел, удовлетворяющий условию, причем максимальное число набора при этом уменьшилось. После нескольких таких операций придем к набору, где все числа нечетны.

Пусть сумма 1024-ых степеней *m* нечетных чисел делится на 1024-ю степень еще одного нечетного числа. Обозначим частное через *n*. Так как все 1024-ые степени дают остаток 1 при делении 211, получаем, что *m*–*n* должно делиться на 211. Поскольку *m* < 211, имеем *n* ≥ *m*. Тогда выберем из наших чисел наибольшее, и если оно не равно никакому из остальных, получим противоречие, ибо частное *n* будет меньше числа слагаемых *m*.**XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап**

**Решения заданий второго дня.**

**5.** *Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что целая часть [x] числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например [1,3] = 1), а дробная часть {x} числа x задается формулой {x} = x–[x].* (М. Дидин)

**Решение**. Если дробная часть числа равна целому числу, то это 0. Значит, надо доказать, что сумма наших чисел — целое число и произведение их целых частей равно 0. Первое очевидно, так как по условию сумма дробных частей наших чисел — целое число. Допустим, второе неверно. Тогда у всех наших чисел
*x*1, …, *xn* целые части не меньше 1, и мы меем

*x*1⋅…⋅*xn* = ([*x*1]+{*x*1})…([*xn*]+{*xn*}) ≥ [*x*1]⋅…⋅[*xn*]+{*x*1}[*x*2]⋅…⋅ [*xn*]+…+[*x*1][*x*2]⋅…⋅{*xn*}+… ≥ 1+{*x*1}+…+{*xn*},

откуда *x*1⋅…⋅*xn* ≥ 1+[*x*1⋅…⋅*xn*], что невозможно.

**6.** *На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник.* (С. Берлов)

**Решение**. Допустим, есть выпуклый 100-угольник *M*, отличный от стертого 100-угольника *N*, у которого набор отмеченных точек такой же. Пусть на сторонах *AB*, *BC* и *CD* многоугольника *N* отмечены точки *A*1, *A*2, *B*1, *B*2, *C*1, *C*2, идущие от *A* к *D* в указанном порядке. Тогда на стороне *UV* 100-угольника *M*, на которой лежит точка *A*2, должна лежать и точка *B*1 — иначе отмеченные точки будут находиться по обе стороны от прямой *UV*, что противоречит выпуклости 100-угольника *M*. Таким образом, стороны 100-угольника *M* лежат на прямых, соединяющих отмеченные точки 100-угольника *N*, соседние с его вершинами.

Пусть *VW* — следующая за *UV* сторона 100-угольника *M*. На ней лежат отмеченные точки *B*2 и *C*1. Так как точка пересечения *B*1диагоналей четырехугольника *A*2*BVB*2 делит их пополам, прямые *A*2*B* и *VB*2, то есть *AB* и *VW*, параллельны. Аналогично, прямая *VW* параллельна стороне *DE* 100-угольника *N*, идущей после *CD*. Получается, что *AB* || *DE*, то есть каждая сторона 100-угольника *N* параллельна двум сторонам, располагающимся через две от нее. Но у выпуклого многоугольника не может быть трех параллельных сторон. Противоречие.

**7.** *Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа m, не превосходящего n, во множестве A есть число, делящееся на m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?* (А. Кузнецов)

**Ответ**. (*k*+1)+(*k*+2)+…+(2*k*+1) = (*k*+1)(3*k*+2)/2 при *n* = 2*k*+1 и (*k*+1)+…+2*k* = *k*(3*k*+1)/2 при *n* = 2*k*.

**Решение**. *Пример*. Искомое множество образуют слагаемые, указанные в ответе.

*Оценка*. Лемма. Пусть *a*1 < *a*2 < … < *ak* < 2*a*1. Тогда НОК чисел *a*1, *a*2, …, *ak* не меньше их суммы. Доказательство. Пусть НОК чисел *a*1, …, *ak* есть *M* = *a*1*n*1 = *a*2*n*2 = … = *aknk*. Тогда 2*nk* > *n*1 > *n*2 > … > *nk*. Следовательно, 2*nk*–*nk* ≥ *k* и *M* ≥ *kak* ≥ *a*1+…+*ak*.

Пусть теперь *A* — множество, удовлетворяющее условиям задачи. Каждому натуральному числу из указанных в ответе сопоставим одно из делящихся на него чисел множества *A*. Тогда каждое число из *A* делится на НОК всех сопоставленных ему чисел, и, стало быть, не меньше суммы этих чисел, а сумма всех чисел из *A* — не меньше суммы, указанной в ответе.

**8.** *В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». Словом считается любая последовательность из 2n букв У и 2n букв Ы (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова похожими, если одно можно получить из другого* ***одной*** *перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи? В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n.* (Д. Белов, И. Богданов)

**Ответ**. . **Решение**. *Оценка*. Всего имеется  слов: по числу размещений 2*n* букв «У» по 4*n* местам. Разобьём каждое слово на блоки по 2 символа. Если есть хотя бы один блок из разных букв, назовём самый левый такой блок *вариативным*. Назовём два слова *идентичными*, если они совпадают везде, кроме общего вариативного блока. В наборе попарно непохожих слов не может быть двух идентичных. Все слова разбиваются на пары идентичных, кроме слов, в которых каждый блок состоит из двух одинаковых букв (назовём их *уникальными* и заметим, что их ). Отсюда и следует оценка.

*Пример*. Выберем все слова, где сумма мест, на которых стоит буква «У», имеет ту же чётность, что и *n*. Они, очевидно, попарно непохожи. С другой стороны, в любой паре идентичных слов ровно одно выбрано, и все уникальные тоже выбраны. Поэтому на этом наборе оценка достигается.