XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 23-26 марта 2021 г.

***Первый день.***

**1.** Прямые *y* = *ax*+*b*, *y* = *bx*+*c*, *y* = *cx*+*d*, *y* = *dx*+*a* ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)?

**2.** Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладёт на счёт *k* (*k* > 0) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет *k+*1 рублей, на третий ⎯ *k+*2 рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие *k*, при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей.

**3.** На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* выбраны точки *P* и *Q* соответственно. Отрезки *CP* и *AQ* пересекаются в точке *R*. Оказалось, что *AR =* *CR =* *PR+QR.* Докажите, что из отрезков *AP, CQ* и *PQ* можно составить треугольник, один из углов которого равен углу *B.*

**4.** Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?