XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 23-26 марта 2021 г.

***Второй день***

**5.** Диагонали трапеции *ABCD* (*AD* || *BC*) пересекаются в точке *K*. Внутри треугольника *ABK* нашлась такая точка *M*, что Ð*MBC* = Ð*MAD*, Ð*MCB* = Ð*MDA*. Докажите, что прямая *MK* параллельна основаниям трапеции.

**6.** Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в *a* раз. Какое наименьшее значение могло принимать число *a*?

**7.** При каких натуральных *n* можно так отметить несколько клеток доски *n*×*n*, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех 4*n*−6 диагоналях, длина которых больше одной клетки, ⎯ нечётное?

**8.** Дано натуральное число *n*. За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное *n*, что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию?