**Эйлер, финал, черновик, версия 3, решения**

**1**. Прямые *y* = *ax*+*b*, *y* = *bx*+*c*, *y* = *cx*+*d*, *y* = *dx*+*a* ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)? (И. Рубанов)

**Ответ**. 2. **Решение**. Данные в условии прямые разбиваются на две пары параллельных. Поэтому либо 1) *a = b* и *c = d*, либо 2) *a = c* и *b = d*, либо 3) *a = d* и *b = c*.

В первом случае квадрат ограничен прямыми *y* = *ax*+*a*, *y* = *ax*+*c*, *y* = *cx*+*c*, *y* = *cx*+*a*. Прямая *y* = *ax*+*a* пересекается с прямыми *y* = *cx*+*c* и *y* = *cx*+*a* в точках *M*(–1, 0) и *N*(0, *a*), а прямая *y* = *ax*+*c* — в точках *Q*(0, *c*) и *P*(1, *a*+*c*). Так как точки *M* и *P* лежат с разных сторон от прямой *NQ*, отрезки *MP* и *NQ* являются диагоналями квадрата. Следовательно, вершины квадрата, идут в порядке *MNPQ*, а точка *P* лежит на оси абсцисс, то есть имеет координаты (1, 0), откуда *PM* = 2. Осталось заметить, что в случае *a* = 1, *с* =–1 *MNPQ* — действительно квадрат площади *PM*2/2 = 2.

Третий случай аналогичен первому, а второй невозможен, так как тогда прямые *y* = *ax*+*b* и *y* = *cx*+*d* совпадают.

**2**. Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладёт на счёт *k* (*k* > 0) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет *k+*1 рублей, на третий ⎯ *k+*2 рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие *k*, при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей. (С. Берлов)

**Ответ**. 2. **Решение**. Покажем по индукции, что если Кощей в первый день внёс 2 рубля, то на *n*-ый день у него на счету будет *n* рублей. База *n* = 1: на первый день два внесённных Кощеем рубля стараниями Спёрбанка тут же превратились в 1 рубль. Пусть на *n*-ый день на счету у Кощея оказалось *n* рублей. Добавив на (*n*+1)-ый день *n*+2 рубля, Кощей получит на счету (*n*+*n*+2)/2 = *n*+1 рублей, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что в первый день Кощей внёс 2+*k* рублей, где *k* ≠ 0. Покажем, что в этом случае у Кощея в *n*-ый день на счету будет *n*+(*k*/2+*k*/4+…+*k*/2*n*) рублей. Из этого будет следовать единственность ответа 2, так как при *n* = *m*+1, где *m* — степень, с которой двойка входит в разложение числа *k* на простые множители, сумма в скобках окажется дробной. База *n* = 1 индукции очевидна. Пусть на *n*-ый день на счету у Кощея оказалось *n*+*k*/2+*k*/4+…+*k*/2*n* рублей. Добавив на (*n*+1)-ый день *n*+2+*k* рублей, Кощей получит на счету (2*n*+2+*k*+*k*/2+*k*/4+…+*k*/2*n*)/2 = *n*+1+*k*/2+*k*/4+…+*k*/2*n*+1 рублей, что и требовалось доказать.

**3**. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* выбраны точки *P* и *Q* соответственно. Отрезки *CP* и *AQ* пересекаются в точке *R*. Оказалось, что *AR =* *CR =* *PR+QR.* Докажите, что из отрезков *AP, CQ* и *PQ* можно составить треугольник, один из углов которого равен углу *B.* (С. Берлов)

**Решение**. Отметим точки *K* и *L* на отрезках *CP* и *AQ* соответственно таким образом, чтобы *CK* = *RP*, а *AL* = *RQ*. Рассмотрим точку *M*, симметричную *R* относительно середины отрезка *AC*. Нетрудно показать, что четырёхугольники *APKM* и *CQLM* — параллелограммы, поэтому треугольник *LKM* — искомый. В самом деле, *MK* = *AP*, *ML* = *CQ*, Ð*LMK* = Ð*ABC* (так как прямые *BA*, *BC*, *MK* и *ML* ограничивают параллелограмм),   
*RL* = *AR*–*AL* = *AR*–*QR* = *PR* и, аналогично, *RK* = *QR*, откуда Δ*PRQ* = Δ*LRK* и *LK* = *PQ*.

**4**. Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире? (В. Мигрин, К. Тыщук, Н. Власова)

**Ответ**. 148. **Решение**. Оценка. Назовём *доменом* команды совокупность всех команд, у которых она выиграла. Команду, в домене которой не менее 99 команд, назовём *доминатором*.

Пусть в турнире участвовали *n* команд. Возьмём любые 100 из них. По условию среди них есть доминатор. Заменим его одной из оставшихся команд. В получившейся сотне снова есть доминатор. Повторяя описанную процедуру, пока не побывавшие в сотне команды не закончатся, убеждаемся, что доминаторов у нас по крайней мере *n*–99.

Пусть доминатор *A* имеет домен *P* с наименьшим числом команд. Покажем, что тогда у команд из *P* выиграли все доминаторы. В самом деле, пусть есть доминатор *B* с доменом *Q*, куда не входит какая-то команда *K* из *P*. Тогда в силу минимальности домена *P* в домене *Q* есть команда *M*, не входящая в *P*. Если *B* ¹ *K* и *A* ¹ *M*, то в сотне *S* команд, составленной из *A*, *B*, *K*, *M* и любых 96 команд из домена *P*, нет команды, победившей все остальные: такой командой может быть только *A* или *B*, но *B* проиграла *K*, а *A* проиграла *M*. Если *B* = *K*, дополним *S* до сотни ещё одной командой из *P*. Тогда *A* проиграла *M*, а *B* проиграла *A*. Случай, когда *A* = *M*, аналогичен, а случай, когда одновременно *B* = *K* и *A* = *M*, невозможен.

Так как в домене *P* не меньше 99 команд, там есть команда *L*, проигравшая хотя бы 49 командам из этого домена — иначе суммарное число поражений в матчах команд из *P* между собой будет меньше суммарного числа побед. Тогда доминаторов не больше 49 — иначе, взяв 50 доминаторов, команду *L* и 49 победивших её команд из домена *P*, мы получили бы сотню (так как в домене *P* в силу доказанного выше нет доминаторов), в которой команда *L* проиграла всем остальным. Отсюда *n*–99 ≤ 49, то есть *n* ≤ 148.

Пример. Разделим 148 команд на 49 доминаторов и 99 доминируемых, проигравших всем доминаторам. Доминируемые команды расположим по кругу, и пусть каждая из них выиграет у 49 следующих за ней по часовой стрелке и проиграет остальным. Доминаторов занумеруем от 1 до 49, и пусть в каждом матче между ними побеждает команда с большим номером. Тогда в любой сотне команд будет хотя бы один доминатор, и доминатор с наибольшим номером победит все остальные команды. С другой стороны, в этой сотне будет хотя бы 51 доминируемая команда, и потому каждая из них победит по крайней мере одну из оставшихся, а каждый доминатор победит их все. Таким образом, команды, проигравшей всем остальным, в сотне не будет.

**5**. Диагонали трапеции *ABCD* (*AD* || *BC*) пересекаются в точке *K*. Внутри треугольника *ABK* нашлась такая точка *M*, что Ð*MBC* = Ð*MAD*, Ð*MCB* = Ð*MDA*. Докажите, что прямая *MK* параллельна основаниям трапеции. (М. Кунгожин)

**Решение**. Опустим из точки *M* перпендикуляры *MP* и *MQ*, на прямые *AD* и *BC* соответственно. Треугольники *MBC* и *MAD* подобны по двум углам. Поэтому *MP*/*MQ* = *AD*/*BC*. Теперь опустим перпендикуляры *KR* и *KS* на прямые *AD* и *BC* из точки *K*. Треугольники *KBC* и *KDA* также подобны по двум углам, откуда *KR*/*KS* = *AD*/*BC* = *MP*/*MQ* = *m*. Кроме того *MP+MQ = PQ = RS = KR+KS* = *n*. Тогда из равенств *MP*/(*n–MP*) = *m* = *KR*/(*n*–*KR*) имеем *MP* = *mn*/(*m*+1) = *KR*. Таким образом, *MPRK* — прямоугольник, откуда и следует утверждение задачи.

**6**. Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в *a* раз. Какое наименьшее значение могло принимать число *a*? (С. Берлов)

**Ответ**. 1,5. **Решение**. Пусть Петя, Вася и Толя поймали *P*, *V* и *T* рыб соответственно. По условию *aP* ≥ *V* Û *P*/*V* ≥1/*a*, *aT* ≥ 5*V*/4 Û *T*/*V* ≥ 5/4*a*. По условию же *aV* ≥ *P*+*T*, откуда *a* ≥ *P*/*V*+*T*/*V* ≥ 1/*a*+5/4*a*. Умножив на *a*, получаем *a*2 ≥ 2,25, откуда *a* ≥ 1,5. Пример, когда подходит *a* = 1,5: *P* = 4, *T* = 5, *V* = 6.

**7**. При каких натуральных *n* можно так отметить несколько клеток доски *n*×*n*, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех 4*n*−6 диагоналях, длина которых больше одной клетки, ⎯ нечётное? (С. Берлов)

**Ответ**. При всех нечётных *n*. **Решение**. При нечётном *n* отметим все клетки верхней и нижней горизонталей, кроме левых угловых. При чётном *n* будем рассуждать от противного. Раскрасим все клетки в шахматном порядке так, чтобы левый нижний угол был чёрным. Заметим, что среди белых клеток должно быть нечётное число отмеченных, поскольку все они находятся в объединении *n*–1 диагоналей, больших 1 по длине. Но если просуммировать отмеченные клетки во всех вертикалях, начиная со второй слева через одну, а потом добавить к ним сумму всех отмеченных клеток в горизонталях, начиная со второй снизу через одну, то каждую отмеченную белую клетку посчитаем ровно один раз, а каждую отмеченную чёрную — ноль или два раза, т. е. насчитаем нечётное число отмеченных клеток. Но это сумма нескольких чётных чисел. Противоречие.

**8**. Дано натуральное число *n*. За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное *n*, что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию? (С. Берлов)

**Ответ**. Существует. **Решение**. Пусть такого *n* не существует. Тогда существует такое *m* < 2021, что из каждого натурального числа можно указанными операциями получить простое не более чем за *m* операций, и есть число *k*, из которого нельзя получить простое число менее чем за *m* операций. Будем получать простое число из числа *k*!+*k*, следя отдельно за судьбой каждого из двух слагаемых. Всякий раз, когда мы вычитаем из суммы число, будем вычитать его из второго слагаемого, сохраняя первое, а на наименьший простой делитель суммы будем делить каждое из слагаемых. Поскольку второе слагаемое с каждой операцией убывает, перед каждой операцией текущее первое слагаемое будет делиться на текущее второе и все меньшие его числа, ибо можно считать, что предыдущими делениями были затронуты только сомножители в *k*!, большие текущего второго слагаемого. Поэтому пока текущее второе слагаемое больше 1, наименьший простой делитель суммы не превосходит наименьшего простого делителя второго слагаемого и потому делит первое слагаемое — а, значит, и второе. Следовательно, наименьший простой делитель суммы равен наименьшему простому делителю второго слагаемого.

Из сказанного следует, что пока текущее второе слагаемое больше 1, то, во-первых, оно при операциях ведет себя так, как будто первого слагаемого нет, и, во-вторых, текущая сумма является составным числом. Следовательно, не позднее момента, когда текущая сумма станет простым числом, текущее второе слагаемое должно обратиться в 1. Такое возможно только в случае, когда на предыдущем шаге второе слагаемое было простым числом. Но это значит, что к моменту превращения второго слагаемого в 1 — и, тем более, к моменту превращения суммы в простое число мы совершили не менее *m*+1 операции. Противоречие.