XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 27–30 марта 2023 г.

***Второй день.***

**5.** Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?

**6.** В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране? Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.

**7.** Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*, в котором *AB* = *BC* = *CD* = 4. На сторонах *AB* и *CD* выбраны точки *K* и *L* соответственно таким образом, что *AK* = *DL* = 1. На стороне *AD* снаружи четырёхугольника построен треугольник *AMD*, в котором *AM* = *MD* = 2. Оказалось, что *KL* = 2. Докажите, что *BM* = *CM*.

**8.** Дано натуральное число *k*, большее 1. Натуральное число *n*, большее 1 и взаимно простое с *k*, назовём *правильным*, если для любого натурального делителя *d* (*d* < *n*) числа *n* число *d*+*k* не взаимно просто с *n*. Докажите, что правильных чисел — конечное количество.