**XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**

**Решения заданий заключительного этапа, 2 день**

**5**. *Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?* (И. Рубанов)

**Ответ**. Нет. **Решение**. Упорядочим Машины числа: 0 < *a* < *b* < *c* < *d*. Тогда первое и второе числа в ряду произведений равны *ab* и *ac*, а пятое и шестое — *bd* и *cd*. Допустим, все пять разностей между соседними произведениями оказались одинаковыми. Тогда, в частности, должно выполняться равенство *ac*–*ab* = *cd*–*bd*. Но если в нем перенести все члены в левую часть и разложить ее на множители, то получим (*a*–*d*)(*c*–*b*) = 0, откуда либо *c* = *b*, либо *a* = *d*. Противоречие.

**6**. *В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране?* *Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.* (М. Антипов)

**Ответ**. 150. **Решение**. Пример. Расположим города на окружности так, чтобы они делили ее на равные дуги, и объявим дорогами эти дуги, направленные по часовой стрелке. Покрасим эти 100 дуг в белый и черный цвета так, чтобы цвета на окружности чередовались. Еще 50 белых дорог направим по хордам, от городов, из которых исходят черные дороги, в города, находящиеся от них через один по часовой стрелке. Очевидно, описанная конструкция удовлетворяет приказу царя. Оценка. Докажем более общий факт: если в царстве 2*k* городов, то дорог должно быть не меньше, чем 3*k*. Пусть это не так. Возьмем наименьшее натуральное *k* такое, что в царстве из 2*k* городов можно обойтись меньше, чем 3*k* дорогами. Тут *k* > 1, так как для двух городов приказ, очевидно, невыполним. Заметим, что белых дорог среди них не меньше 2*k*, так как из каждого города должна выходить белая дорога. Значит, черных дорог не больше, чем *k*–1, и потому найдутся хотя бы два города без черных дорог. Выбросим их вместе со связанными с ними дорогами. При этом мы удалим не меньше трех дорог, так как из каждого из двух городов можно было выехать и можно было в него въехать, и не более чем одна такая дорога учтена дважды. Итак, теперь у нас 2(*k*–1) городов и меньше 3(*k*–1) дорог. Но, поскольку через выброшенные города не мог проходить ни один маршрут с чередующимися цветами дорог, оставшиеся города с дорогами по-прежнему удовлетворяют условию царя, что противоречит минимальности числа *k*.

**7**. *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, в котором AB = BC = CD = 4. На сторонах AB и CD выбраны точки K и L соответственно таким образом, что AK = DL = 1. На стороне AD снаружи четырёхугольника построен треугольник AMD, в котором AM = MD = 2. Оказалось, что KL = 2. Докажите, что BM = CM.* (Ц. Французов)

**Первое решение**. Заметим, что треугольник *MDL* подобен треугольнику *CDM* с коэффициентом 2 (*CD* = 2*MD*, *DM* = 2*DL*, угол при вершине *D* — общий), поэтому *MC* = 2*ML*. Аналогично, *MB* = 2*MK*. Поэтому треугольник *MLK* подобен треуголь­нику *MCB*. Следовательно, *LMK* = *BMC* и потому *LMC* = *KMB*. Значит, тре­угольник *LMC* подобен треугольнику *BMK*. Но *LC* = *BK*, значит эти треугольники равны, откуда и получаем *BM* = *CM*. **Второе решение**. Докажем, что *MC =*2*ML.* Пусть *T —* такая точка на луче *ML,* что *MT =*2*ML,* и пусть *S —* середина *CD.* Тогда *MSTD —* параллелограмм, ибо его диагонали делятся друг другом пополам. Заметим, что *MD = DS =*2, поэтому *SMD =**MSD. з*начит, *MST =*180–*SMD =*180–*MSD =**MSC.* Значит, треугольники *MST* и *MSC* равны по двум сторонам (*ST = MD = SC =*2, *MS —* общая) и углу между ними. Поэтому *MC = MT =*2*MS.* Аналогично, *MB =* 2*MK.* Значит, стороны треугольника *MKL* равны соответственно половинам сторон треугольника *MBC* (*KL* = 2 = *BC*/2 по условию),и треугольник *MKL* равен треугольнику с вершинами в *M* исерединах отрезков *MB* и *MC.* Отсюда *LMK =* *BMC.* Осталось повторить две последние фразы первого решения.

**8***. Дано натуральное число k, большее 1. Натуральное число n, большее 1 и взаимно простое с k, назовём* ***правильным****, если для любого натурального делителя d (d < n) числа n число d+k не взаимно просто с n. Докажите, что правильных чисел — конечное количество.* (С. Берлов)

**Решение**. Если правильное число *n* — простое, то 1+*k* должно делиться на *n*, и таких правильных чисел конечное количество. Если правильное число *n* равно степени *ps* простого числа*,* где *s* ≥ 2,то *p+k* и 1+*k* не взаимно просты с *n,* откуда *k* делится на *p*, и, следовательно, 1 делится на *p,* противоречие. Поэтому такое *n* не может быть правильным. Таким образом, составное правильное число *n* имеет хотя бы два различных простых делителя *p* и *q*. *П*оложим *t =*. По условию *pt+k* должно иметь общий простой делитель с *n,* но это может быть только *q,* поскольку на остальные простые делители *n* делится *pt,* а *k* взаимно просто с *n.* Аналогично, *qt+k* делится на *p.* Значит, *t* взаимно просто с *pq,* т. е. все простые сомножители входят в разложение *n* в первой степени. Но число *t+k* тоже должно иметь общий простой делитель с *n. Э*то может быть только *p* или *q* —не умаляя общности можно считать, что *p.* Тогда оба числа *qt+k* и *t+k* делятся на *p*.Поэтому делится на *p* и их разность *t*(*q*–1), а, значит, и *q*–1*.* Из этого следует, что если *r —* самый большой простой делитель *n,* то *r*–1делится на все остальные простые делители *n*, а, значит, делится и на их произведение, равное , т. е. . Но число  должно иметь общий простой делитель с *n, э*то может быть только *r.* Т. е.  делится на . Если *x* = 1, то *k*–1делится на , если же *x* ≥ 2, то . В любом случае, *k >* и 2*k >*+*k*≥*r,* поэтому *n <*2*k*2, откуда и вытекает утверждение задачи.