

XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Региональный этап

4 февраля 2022 г.

8 класс.

Первый день.

1. Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.
2. Учитель придумал ребус, заменив в примере $a+b=c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными (например, если $a=23$, а $b=528$, то $c=551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус $АБ+ВАГ=ВВД$). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c .
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL . На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC .
4. Числа $1, 2, \dots, 1000$ разбили на два множества по 500 чисел: красные k_1, k_2, \dots, k_{500} и синие s_1, s_2, \dots, s_{500} . Докажите, что количество таких пар m и n , у которых разность $k_m - s_n$ дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n , у которых разность $s_n - k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются **все** возможные разности, в том числе и отрицательные.
Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$.
5. При каком наибольшем n существует выпуклый n -угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?