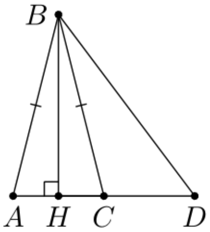
XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

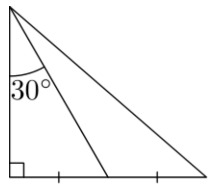
6. *Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.* (Н. Агаханов)

Решение. Пусть наши числа равны k, k+1 и k+2, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел k+1 и k+2 равны, соответственно, r+1 и r+2, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r+3 = 3(r+1)$. Противоречие.

Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.



7. *Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?* (Н. Агаханов)



Ответ. Существует. **Решение**. Возьмём треугольник ABC, где $AB = BC$ и высота BH, проведенная из вершины B, равна $2AC$ (очевидно, такой существует). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2AC$, а медиана BC равна стороне AB. Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведённая из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30°.

8. *Будем называть натуральное число* ***красивым****, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?* (К. Сухов)

Ответ. Не может. **Решение**. Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа x $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству $10^{3n-1} < x < 3\cdot10^{3n-1}$ (*). Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9\cdot10^{3(k+m)-2}$, а, значит, и между степенями десятки с показателями $3(k+m)-2$ и $3(k+m)-1$. Красивое же число в силу неравенства (*) лежит между степенями десятки с показателями $3n-1$ и $3n$. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

9. *Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.* (С. Берлов)

Решение. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$, а Вася — $b_1 > b_2 > \ldots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1, а у Пети все остатки будут меньше b_1 — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$ для некоторого $k \geq 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел $a_1, \ldots, a_k$ у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1}, так как там либо делимое меньше a_{k+1}, либо делитель не превосходит a_{k+1}. Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \ldots, 99$ (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

10. *В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?* (С. Берлов)

Ответ. 50. **Решение**. *Пример*. Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки.

Оценка. Рассуждаем от противного. Пусть $k < 50$. *Первое доказательство*. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером k равен $100t_k+1$, где t_k — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как $k < 50$, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть $t_1 = t_{51}$. Аналогично, $t_2 = t_{52}, \ldots, t_{50} = t_{100}$. Поэтому сумма всех сдвигов всех фишек равна $100(2t_1+\ldots+2t_{50}+1)$. Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечетна. Противоречие.

Второе доказательство. В каждый момент времени считаем {\it *покрашенной*} дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m ($2 \le m \le 99$) могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100. Поскольку изначально и в конце фишка m не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество {\it *входов*} на покрашенную дугу и {\it *выходов*} с покрашенной дуги. При $m \le 50$ фишка m не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать {\it вход} или {\it выход} только путём обмена с фишкой 1. При {\it входе} фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при {\it выходе} — на 1 против часовой стрелки. Проведём аналогичные рассуждения для фишек $m \ge 51$, которые не могут меняться с фишкой 1. Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.