Первый тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *На день рождения родители дарят Дяде Фёдору сумму денег, равную произведению возраста папы на возраст мамы. Могло ли случиться, что в 2010 и 2011 годах полученные им суммы кончались на одну и ту же цифру, а сумма, полученная в 2012 году, делилась на 10?*

Ответ: Могло. Решение. Например, если в 2010 году папе Дяди Федора было 38 лет, а маме — 31 год. Замечание. Все возможные примеры — это когда возраста родителей Дяди Фёдора в 2010 г. заканчиваются на цифры 3 и 6, или когда они заканчиваются на 1 и 8. Других примеров нет.

2. *Маша упражняется в перекрашивании шахматной доски. За один раз она может изменить цвет каждой клетки в любом прямоугольнике, прилегающем к углу доски. Получится ли у неё с помощью таких операций перекрасить всю доску в один цвет?*

Ответ: Получится. Первое решение. Пронумеруем клетки доски: в верхней горизонтали слева направо номерами от 1 до 8, во второй сверху — слева направо номерами от 9 до 16 и т.д. Пусть клетка в правом нижнем углу — белая. Пусть n — наибольший номер черной клетки. Возьмем черную клетку K с этим номером и перекрасим все клетки прямоугольника, у которого одна из вершин — левая верхняя вершина доски, а вторая — правая нижняя вершина клетки K. Ни одна из клеток с номерами, большими n, в нем не лежит, так как все они правее или ниже K. Поэтому наибольший номер черной клетки после такой перекраски уменьшится. Поскольку такое уменьшение может происходить лишь конечное (не большее 63) число раз, мы, повторяя описанную процедуру, в конце концов получим белую доску. Второе решение. Перекрасим первый столбец, потом прямоугольники из первого и второго столбцов, из первого, второго и третьего столбцов, …, из 1-7 столбцов. Затем перекрасим первую строку, затем прямоугольники из первой и второй строк, из первой, второй и третьей строк, …, из 1-7 строк. Нетрудно проверить, что после этого все клетки того же цвета, что и клетка на пересечении первой строки и первого столбца, перекрасятся четное число раз, а все клетки противоположного цвета — нечетное число раз, так что вся доска окрасится в цвет клетки на пересечении первой строки и первого столбца.

3. *В треугольнике ABC AB = BC. На лучах CA, AB и BC отмечены соответственно точки D, E и F так, что AD = AC, BE = BA, CF = CB. Найдите сумму углов ADB, BEC и CFA.*

Ответ: 90°. Решение. Положим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Треугольники BAD и FCA равны ($AD = CA$, $BA = BC = FC$, $\angle BAD = 180°-\alpha = \angle FCA$). Поэтому $\angle CFA+\angle ADB = \angle ABD+\angle ADB = \alpha$ (1). С другой стороны, $EB = BA = BC$, откуда $180°-2\alpha = \angle ABC = 2\angle BEC$ и $\angle BEC = 90°-\alpha$. Складывая это равенство с равенством (1), получаем ответ.

4. *Положительные числа x и y таковы, что $x^2 > x+y$, а $x^4 > x^3+y$. Докажите, что $x^3 > x^2+y$.*

Первое решение. Перепишем условие в виде $x^2-x = x(x-1) > y$, $x^4-x^3 = x^3(x-1) > y$, Доказать надо, что $x^3-x^2 = x^2(x-1) > y$. Заметим, что $x > 1$ — иначе $x(x-1) \le 0 < y$. Но тогда $x^2(x-1) > x(x-1) > y$. Второе решение. Так как $x^2 > x+y$ и $x > 1$, $x^3 > x^2+xy > x^2+y$. Третье решение. Перемножим неравенства $x(x-1) > y$ и $x^3(x-1) > y$ (это возможно, так как $x-1 > 0$) и извлечем квадратный корень из обеих частей полученного неравенства. Получим искомое неравенство $x^2(x-1) > y$. Замечание. Как видим, условие $x^4 > x^3+y$ — лишнее, но есть и использующие его решения.

5. *40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется **дылдой**, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и **мелким**, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке. (Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.*

Решение. Назовём *обычными* детей, не являющихся дылдами, а *компанией* — обычного ребенка и всех дылд, стоящих между ним и предыдущим по часовой стрелке обычным ребенком. В каждой компании все дети, кроме двух первых по часовой стрелке — мелкие, потому что каждому из них предшествуют двое дылд. Поскольку обычных детей не больше 10, компаний тоже не больше 10.

Поэтому если мы удалим из каждой компании двух первых по часовой стрелке детей, останется не меньше 20 мелких, что и требовалось доказать.