

Первый тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. Дана дробь $2/3$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$?

Ответ: Нельзя. Решение. Допустим, нашлись такие целые неотрицательные a и b , что $(2+2013a)/(3+2014b) = 3/5$. Тогда после сокращения числитель должен стать тройкой. Но это невозможно, потому что $2+2013a$ не делится на 3, так как 2013 делится на 3, а 2 — нет.

2. Клетчатый прямоугольник со сторонами 629 и 630 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? Не забудьте объяснить, почему в разбиении не может получиться меньшее число квадратов с нечетной стороной.

Ответ: Два. Решение. Пример, когда квадратов ровно два: два квадрата со стороной 315 примыкают к стороне прямоугольника длиной 630, а оставшийся прямоугольник 630×314 разрезан на квадраты 2×2 . Меньшего числа квадратов с нечетной стороной быть не может: к каждой из сторон длиной 629 примыкает хотя бы один квадрат с нечетной стороной, и это не может быть один и тот же квадрат, так как тогда его сторона хотя бы 630, чего быть не может. Замечание. Одного квадрата с нечетной стороной не может быть еще и потому, что площадь прямоугольника четна, а суммарная площадь всех квадратов в таком случае нечетна.

3. Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ..., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

Ответ: Через 20 минут. Решение. Первая встреча стрелок случится, когда самая быстрая 150-я стрелка нагонит самую медленную первую. После этого они отвалятся, и про них можно забыть. Вторая встреча произойдет, когда самая быстрая из оставшихся, 149-я, нагонит самую медленную из оставшихся вторую. Рассуждая аналогично далее, убеждаемся, что 74-я стрелка отвалится вместе с 77-й. Так как 77-я стрелка делает в час на три оборота больше, чем 74-я, она нагоняет 74-ю со скоростью 3 оборота в час и впервые нагонит ее через $1/3$ часа.

4. На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Винтика, Шпунтика или Кнопочку. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты набрали в сумме 146% голосов. Считавший голоса Незнайка объяснил, что по ошибке подсчитал процент голосов за Винтика не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Винтика или Шпунтика (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Шпунтика проголосовало больше 1 000 избирателей. Докажите, что Винтик набрал больше 850 голосов.

Решение. Пусть Шпунтик набрал a голосов, Винтик — ka голосов, Кнопочка — b голосов. По условию $ka/(a+ka) + (a+b)/(a+ka+b) = 1,46 \Rightarrow ka/(a+ka) > 0,46 \Rightarrow k > 0,46(1+k) \Rightarrow k > 46/54 > 0,85$. Так как Шпунтик набрал больше 1000 голосов, за Винтика голосовали $ka > 1000k > 1000 \cdot 0,85 = 850$ человек, что и требовалось доказать.

5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P . Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB+BC = CD+DE$. Докажите, что $AD = BE$.

Решение. По условию треугольник ACE — равносторонний, откуда $\angle APB = \angle ACE = 60^\circ$ и $\angle APE = 120^\circ$. Положим $\varphi = \angle BEA$. Тогда $\angle DAE = 180^\circ - \angle APE - \angle BEA = 60^\circ - \varphi$, откуда $\angle CAD = \varphi$. Поэтому при повороте на 120° относительно центра треугольника ACE , переводящем A в E , луч AD перейдет в луч EB , а точка D — в такую точку F , что $EF = AD$ и $AF+FC = CD+DE = AB+BC$. Заметим, что если $EF < EB$, то $AF+FC < AB+BC$. В самом деле, по построению точка F лежит вне треугольника ACE , и, стало быть, внутри треугольника ABC . Продолжим AF до пересечения с BC в точке G . Тогда по неравенству треугольника $AB+BC = AB+BG+GC > AG+GC = AF+FG+GC > AF+FC$. Аналогично, если $EF > EB$, то $AF+FC > AB+BC$. Поэтому $AD = EF = EB$.