Первый тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Найдите три несократимых дроби с числителями и знаменателями, не равными 1, сумма которых — целое число, и сумма дробей, обратных к ним — тоже целое число.*

Решение. Например, 11/2, 11/6, 11/3. Замечание. Составители, естественно, имели в виду, что дроби должны быть различными. Но так как это не было явно оговорено в условии, засчитываются и ответы, где есть равные дроби, например, –1/3, –1/3, –1/3; 5/2, 5/4, 5/4 и т.п.

2. *Из натуральных чисел от 1 до 25 Даша выбрала шесть таких, что разность любых двух выбранных чисел кратна 4. Какое наибольшее количество простых чисел могла выбрать Даша?*

Ответ: Пять. Первое решение. Разность двух чисел делится на 4 тогда и только тогда, когда эти числа имеют одинаковые остатки от деления на 4. Выпишем все простые числа, меньшие 25, и их остатки от деления на 4: 2-2, 3-3, 5-1, 7-3, 11-3, 13-1, 17-1, 19-3, 23-3. Больше всего — пять — простых чисел с остатком 3, что и даёт ответ. Второе решение. Так как 5–2 = 3,13–11 = 19–17 =2, из групп простых чисел {2, 3, 5}, {11, 13}, {17, 19} Даша могла выбрать не больше, чем по одному числу. Из простых, меньших 25, в эти группы не входят только числа 7 и 23, поэтому простых чисел среди выбранных Дашей не больше пяти. Пример, когда их ровно пять, дан в первом решении.

3. *В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\angle ABM = 40°$, а $\angle CBM = 70°$. Найдите отношение $AB : BM$.*

Ответ: 2. Первое решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Так как диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, точка M является точкой их пересечения и $BD = 2BM$. С другой стороны, $\angle BDA = \angle CBD = 70°$, а $\angle BAD = 180° - \angle BDA - \angle ABD = 70° = \angle BDA$, откуда $AB = BD = 2BM$ и $AB{:}BM = 2BM{:}BM = 2$. Второе решение. Заметим, что BC — биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABM. Поэтому $AB{:}BM = AC{:}CM = 2$.

4. *Различные неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2 = c^2+ab$. Докажите, что $c^2+ab < ac+bc$.*

Решение. Не умаляя общности, положим $a < b$. Тогда $c^2+ab < ac+bc \Leftrightarrow (c-b)(c-a) < 0 \Leftrightarrow a < c < b$. Докажем последнее неравенство от противного. Допустим, $c \le a$. Тогда $c^2+ab \le a^2+ab < a^2+b^2$ — противоречие. Допустим, $c \ge b$. Тогда $c^2+ab \ge b^2+ab > b^2+a^2$ — снова противоречие.

5. *Клетки квадрата $n\times n$ раскрашены в черный и белый цвет с таким условием, что никакие четыре клетки, находящиеся на пересечении двух строк и двух столбцов, не могут быть все одного цвета. Каково наибольшее возможное значение n?*

Ч	Б	Ч	Б
Ч	Ч	Б	Б
Б	Ч	Ч	Б
Б	Б	Б	Ч

Решение. Пример для $n = 4$ показан на рисунке справа. Докажем от противного, что квадрат 5×5 таким способом раскрасить невозможно. Назовем строку *преимущественно черной*, если в ней черных квадратиков больше, чем белых, и *преимущественно белой* в противном случае. Из пяти строк найдутся либо три преимущественно черных, либо три преимущественно белых; не умаляя общности будем считать, что нашлись три преимущественно черных строки. В них минимум девять черных клеток.

Теперь рассматриваем только эти три строки. Если в каком-то столбце (назовем его А) стоят три черных клетки, то на оставшиеся четыре столбца приходятся по крайней мере шесть черных клеток. Поэтому найдется столбец (назовем его Б), где есть две черные клетки. Тогда, взяв столбцы А и Б и две строки, в которых находятся две черных клетки столбца Б, получим противоречие.

Значит, в каждом столбце не больше двух черных клеток. Но это возможно только тогда, когда хотя бы в четырех столбцах по две черные клетки. Так как есть только три способа покрасить две клетки из трех в черный цвет, в каких-то двух столбцах раскраска одинакова, и мы снова получаем противоречие.