Первый тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *На доске выписаны в ряд все натуральные числа от 1 до 2018: 1, 2, 3, ..., 2018. Найдите среди них какие-нибудь два, после стирания которых сумма всех чисел, стоящих между стёртыми, оказалась вдвое меньше суммы всех остальных не стёртых чисел?* (Автор задачи — А. Голованов)

Ответ. Например, 673 и 1346. Решение. Заметим, что суммы чисел, равноотстоящих от концов ряда, равны: $1+2018 = 2+2017 = \ldots = 1009+1010$. Если стереть одну такую пару чисел, пар останется $1008 = 336 \cdot 3$. Значит, если между стёртыми числами будет 336 пар, то снаружи останется $336 \cdot 2 = 672$ пары, и условие задачи будет выполнено. Именно так и получится, если стереть числа 673 и 1346. Замечание. Приведённый в ответе пример – не единственный: ещё подходят, например, числа 1289 и 1738.

2. *В треугольнике ABC провели биссектрису BD, а в треугольниках ABD и CBD — биссектрисы DE и DF соответственно. Оказалось, что EF || AC. Найдите угол DEF.* (И. Рубанов)

Ответ. 45 градусов. Решение. Пусть отрезки BD и EF пересекаются в точке G. Из условия имеем $\angle EDG = \angle EDA = \angle DEG$, откуда $GE = GD$. Аналогично, $GF = GD$. Значит, $GE = GF$, то есть BG — биссектриса и медиана, а значит, и высота в треугольнике BEF. Отсюда DG — медиана и высота, а значит, и биссектриса в треугольнике EDF, откуда $\angle DEG = \angle EDG = \angle FDG = \angle GFD$. Поскольку сумма четырёх входящих в последнее равенство углов равна 180 градусам, каждый из них равен 45 градусам.

3. *Для каждой пары* ***различных*** *натуральных чисел a и b, не больших 20, Петя нарисовал на доске прямую $y = ax+b$ (то есть он нарисовал прямые $y = x+2$, ..., $y = x+20$, $y = 2x+1$, $y = 2x+3$,..., $y = 2x+20$, ..., $y = 3x+1$, $y = 3x+2$, $y = 3x+4$, ..., $y = 3x+20$, ..., $y = 20x+1$, ..., $y = 20x+19$). Вася нарисовал на той же доске окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Сколько Петиных прямых пересекает Васину окружность?* (И. Рубанов)

Ответ. 190. Первое решение. График $y = ax+b$ пересекает оси координат в точках $A(-b/a, 0)$ и $B(0, b)$. Если $b < a$, точка A находится внутри Васиной окружности, и потому график $y = ax+b$ пересекает её. Нетрудно подсчитать, что Петиных прямых, у которых $b < a$, имеется $19+18+\ldots+2+1 = 190$.

Рассмотрим теперь случай, когда $b > a$. Тогда точки $K(-1, 0)$ и $N(0, 1)$ находятся на катетах треугольника OAB, где O — начало координат, а точка $M(-1, 1)$ находится внутри этого треугольника, так как $a\cdot(-1)+b = b-a \geq 1$. Таким образом, угол KMN целиком лежит ниже прямой $y = ax+b$, и Васина окружность не пересекается с этой прямой, так как целиком содержится в угле KMN.

Итак, Петина прямая пересекается с Васиной окружностью тогда и только тогда, когда $b < a$, откуда и получается ответ.

Второе решение. Уравнение Васиной окружности — $x^2+y^2 = 1$. Петина прямая пересекает эту окружность тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $x^2+(ax+b)^2 = 1$ имеет два решения. После раскрытия скобок и приведения подобных членов это уравнение принимает вид $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-1 = 0$. Дискриминант здесь равен $4(a^2+1-b^2)$, и он положителен тогда и только тогда, когда $a^2+1 \geq b^2 \Leftrightarrow a > b$. Далее рассуждаем как в начале первого решения.

4. *Квадрат со стороной 100 разрезали на квадраты (не обязательно одинаковые) со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата и меньшими 10. Докажите, что сумма периметров получившихся квадратов не меньше 4400.* (И. Рубанов)

Решение. Проведём 11 параллельных отрезков, два из которых являются сторонами квадрата 100×100, а остальные девять делят этот квадрат на прямоугольники 10×100. Тогда каждый квадрат нашего разрезания пересекается ровно с одним из этих отрезков по отрезку, равному своей стороне. Значит, сумма сторон квадратов разрезания не меньше, чем $11\cdot100 = 1100$, а сумма периметров — не меньше, чем $1100\cdot4 = 4400$.

5. *На каждой из пяти карточек написано какое-то число. Карточки лежат на столе числами вниз. Мы можем, заплатив рубль, указать на любые три карточки, и нам сообщат сумму написанных на* *них чисел. За какую наименьшую цену можно наверняка узнать сумму всех пяти чисел?* (И. Рубанов)

Ответ. За 4 рубля. Решение. Пусть написаны числа a, b, c, d, e. Спросим про суммы $a+b+c$, $a+b+d$, $a+b+e$, $c+d+e$. Тогда, складывая три первые суммы и вычитая из результата четвёртую, получаем $3(a+b)$, затем $a+b$ и, прибавляя к результату $c+d+e$, сумму всех пяти чисел.

Допустим, нам удалось обойтись тремя вопросами. Назовём *вхождением* присутствие карточки в вопросе. Если есть карточка с тремя вхождениями, то увеличим число на ней на 2, а все остальные числа уменьшим на 1. Тогда ответы на все три вопроса не изменятся, а сумма всех чисел уменьшится на 2. Значит, её такими тремя вопросами узнать нельзя. Получается, что у каждой карточки не больше двух вхождений, а это возможно только если у четырёх карточек по два вхождения, а у одной — одно. Поменяв, если надо, обозначения, мы можем считать, что одно вхождение у карточки e, а один из вопросов — $a+b+c$. Тогда в ещё одном вопросе без карточки e должны присутствовать две из трёх карточек a, b, c. Поменяв, если надо, обозначения, можно считать, что это вопрос $a+b+d$. Тогда в третьем вопросе не может быть ни одной из карточек a и b, то есть это вопрос $c+d+e$. Но тогда при увеличении каждого из чисел a и e на 2 с одновременным уменьшением каждого из чисел b, c и d на 1 ответы на все три вопроса не изменятся, а сумма всех чисел увеличится на 1. Значит, и в этом случае сумму всех пяти чисел узнать нельзя.