**Первый тур дистанционного этапа XIII олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.** *За круглым столом сидели 99 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Хотя бы один из двух моих соседей — лжец.» Могло ли среди них быть ровно 60 рыцарей?* (Фольклор)

Ответ. Могло. Решение. Сначала посадим за стол 39 лжецов. Потом в 21 промежуток между соседними лжецами посадим по два рыцаря, а в остальные 18 промежутков — по одному рыцарю. Нетрудно проверить, что такая рассадка удовлетворяет всем условиям задачи.

**2.** *Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что НОД(a, b)+НОК(a, b) = ab/2.* (И. Рубанов)

Ответ. *a* = *b* = 4; *a* = 3, *b* = 6; *a* = 6, *b* = 3. Первое решение. Пусть НОД(*a*, *b*) = *d*, *a* = *xd*, *b* = *yd*. Тогда НОК(*a*, *b*) = *xyd* и уравнение принимает вид *d*+*xyd* = *xyd*2/2, откуда 2*xy*+2 = *xyd*. Значит, 2 делится на *xy*, то есть *xy* = 1 или *xy* = 2. В первом случае имеем *x* = *y* = 1, *d* = 4, то есть *a* = *b* = 4; во втором числа *x* и *y* — это 1 и 2 (в каком-то порядке), а *d* = 3, откуда *a* и *b* — это 3 и 6. Второе решение. Так как число *ab*/2 — целое, среди чисел *a* и *b* есть чётное. Пусть это число *a*. Тогда НОД(*a*, *b*) = *ab*/2–НОК(*a*, *b*) делится на *b*. Это возможно только если НОД(*a*, *b*) = *b*, то есть *a* делится на *b*. С другой стороны, *ab*/2 и НОК(*a*, *b*) кратны *a*/2, поэтому НОД(*a*, *b*) *= b* делится на *a*/2. Таким образом, либо *a = b*, либо *a =*2*b*. В первом случае получаем 2*b = b*2/2, то есть *a = b =*4, во втором *b*+2*b = b*2, то есть *a =*6 и *b =*3. Случай, когда *b* четно, разбирается аналогично и дает решение *a* = 3, *b* = 6.

**3.** *На шахматной доске 8х8 нарисованы по клеточкам 17 не налегающих друг на друга двухклеточных прямоугольников. Докажите, что на доске найдутся две имеющие общую сторону клетки, одна из которых лежит в одном из нарисованных прямоугольников, а другая — в другом.* (И. Рубанов)

Решение. Разобьём доску на 16 квадратов 2х2. Отметим клетки нарисованных прямоугольников. Всего будет отмечено 34 клетки. Это больше, чем 2⋅16, поэтому найдется квадрат, в котором можно выбрать три отмеченные клетки. Центральная клетка образованного ими «уголка» не может лежать в одном нарисованном прямоугольнике с обеими его боковыми клетками, откуда и вытекает утверждение задачи.

**4.***Положительные числа a, b, c, d таковы, что (a+b+2c)2 > d, (b+c+2d)2 > a, (c+d+2a)2 > b, (d+a+2b)2 > c. Докажите, что a+b+c+d > 1/4.* (И. Богданов)

Решение. Пусть *d* — наибольшее из четырех данных чисел (случаи, когда наибольшим является одно из трех других чисел, аналогичны). Тогда (*a*+*b*+*c*+*d*)2 ≥ (*a*+*b*+2*c*)2 >*d* ≥ (*a*+*b*+*c*+*d*)/4, откуда *a*+*b*+*c*+*d* > 1/4.

**5.***В треугольнике ABC (ÐC = 90°) на катете BC отмечены точки K и L такие, что ÐCAK = ÐKAL = ÐLAB. На гипотенузе AB отмечена точка M такая, что ML = KL. Докажите, что перпендикуляр из точки C на прямую AK* ***не*** *делит отрезок ML пополам*. (М. Кунгожин)

Решение. Проведем окружность w с центром в точке *L* и радиусом *KL*. Она пересекает прямую *AB* в двух точках или касается ее. Рассмотрим первый случай (второй сводится к нему). Одной из двух точек пересечения будет точка *M*1, симметричная точке *K* относительно прямой *AL*, так как она лежит на прямой *AB* и *LM*1 = *LK*. При этом Ð*LM*1*A* = Ð*AKL* = Ð*ACK*+Ð*CAK* > 90°. Поэтому угол *LM*1*A* является внешним углом равнобедренного треугольника *M*1*LM*2, где *M*2 — вторая точка пересечения w с *AB*, и точка *M*1 лежит между точками *A* и *M*2.

Положим Ð*CAK* = Ð*KAL* = Ð*LAB* = α, а через *N* обозначим середину основания *KM*1 равнобедренного треугольника *KLM*1. Из равенства прямоугольных треугольников *ACK* и *ANK* находим Ð*AKN* = Ð*AKC* = 90°–α, откуда Ð*NM*1*L* = Ð*NKL* = Ð*AKL*–Ð*AKN* = (90°+α)–(90°–α) = 2α.

Пусть *P* — середина отрезка *LM*1, *R* — середина отрезка *LM*2, а *Q* — точка пересечения прямой *CN* с отрезком *M1L*. Поскольку Δ*ACK* = Δ*ANK*, *KC* = *KN*, откуда *CN*  *AK* и Ð*M*1*NQ* = Ð*KNC* = Ð*KCN* =  < 2 = Ð*M*1*NP*. Таким образом, точка *Q* лежит между точками *M*1 и *P*, следовательно, прямая *CQ* не может проходить через точку *P*. Через точку *R* прямая *CQ* также не может проходить, поскольку Ð*CQL*+Ð*LQR* < Ð*CPL*+Ð*LPR* < 180°.