**Первый тур дистанционного этапа XV олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.***На дискотеку пришли 42 человека: мальчики и девочки. Каждая девочка потанцевала со всеми мальчиками, кроме четырёх, а каждый мальчик потанцевал со всеми девочками, кроме трёх. Сколько мальчиков было на танцах?* (Фольклор)

Ответ. 24. Решение. Пусть на дискотеку пришли *m* мальчиков и *d* девочек. Обозначим мальчиков синими точками, девочек — красными и соединим отрезками мальчиков и девочек, **не** танцевавших друг с другом. Пусть всего получилось *k* отрезков. Так как из каждой красной точки выходит 4 отрезка, а из каждой синей — 3 отрезка, и каждый отрезок соединяет красную и синюю точки, выполнены равенства 4*d* = *k* = 3*m*, откуда *d* = 3*m*/4. По условию *m*+*d* = *m*+3*m*/4 = 7*m*/4 = 42, откуда *m* = 24.

**2.***Запишите четыре числа (не обязательно целых), среди которых нет одинаковых, чтобы выполнялось такое условие: если число x есть среди записанных, то хотя бы одно из чисел x−1 или 6x–1 тоже есть среди записанных.* (И. Рубанов, С. Берлов)

Ответ. Например, 1/5, 6/5, 11/5, 16/5. Решение. Пусть записаны числа *x*, *x*+1, *x*+2, *x*+3. Для трёх последних чисел условие задачи, очевидно, выполнено. Чтобы оно было выполнено и для первого, подберём *x* так, чтобы выполнялось равенство *x* = 6*x*–1. Решая полученное уравнение, находим, что *x* = 1/5, откуда и получаем приведённый выше ответ. Замечание. Найденный ответ — далеко не единственный. Ещё три четвёрки чисел, удовлетворяющие условию задачи, можно получить, приравнивая 6*x*–1 числам *x*+1, *x*+2 или *x*+3. Другие подходящие четвёрки можно находить, заменяя последовательность *x*, *x*+1, *x*+2, *x*+3 на другую, где условие задачи при любом *x* выполняется для всех чисел, кроме одного, например, на *x*, 6*x*–1, 6*x*–2,6*x*–3.

**3.***Внутри стороны BC выпуклого четырехугольника ABCD нашлась такая точка E, что прямая AE делит четырёхугольник на две равные по площади части. Какая из вершин четырехугольника находится дальше всех от прямой AE?* (И. Рубанов, Д. Ширяев)

Ответ. Вершина *B*. Решение. Опустим перпендикуляры *BB*1, *CC*1, *DD*1 на прямую *AE*. Тогда

*DD*1⋅*AE* = 2*S*(*ADE*) < 2*S*(*ADCE*) = 2*S*(*ABE*) = *BB*1⋅*AE*,

откуда *DD*1 < *BB*1. Аналогично из неравенства 2*S*(*ACE*) < 2*S*(*ADCE*) получаем, что *CC*1 < *BB*1. Поскольку расстояние от точки *A* до прямой *AE* равно 0, получаем, что вершина *B* удалена от прямой *AE* больше, чем все остальные вершины четырехугольника *ABCD*.

**4.***Петя и Вася играют в такую игру. Вначале в каждой из 2022 коробок лежит по одной спичке. За один ход можно переложить все спички из любой непустой коробки в любую другую непустую коробку. Ходят по очереди, начинает Петя. Побеждает тот, после хода которого в какой-то коробке впервые окажется не меньше половины всех спичек. Кто победит при правильной игре?* (И. Рубанов)

Ответ. Вася. Решение. Заметим, что неважно, перекладывать спички из коробки А в коробку Б или из Б в А: в обоих случаях одна из коробок становится пустой, а в другой оказываются все спички, лежавшие в обеих коробках. Первым ходом Петя добавляет одну спичку в какую-то коробку. Отметим эту коробку и будем считать, что в дальнейшем если эта коробка участвует в перекладывании, то спички добавляются в неё. Вася своим первым ходом также добавляет спичку в отмеченную коробку. Далее Вася играет так: если Петя своим очередным ходом добавляет спичку в отмеченную коробку, тоже добавляет туда спичку, а если Петя создал коробку с двумя спичками, перекладывает в отмеченную коробку обе эти спички. При такой игре после *k*-го хода Васи в отмеченной коробке будет 2*k*+1 спичек, а в остальных — не больше, чем по одной спичке, а после *k*-го хода Пети в отмеченной коробке будет 2*k* или 2*k*–1 спичек, а в остальных — не больше, чем по две спички. Тогда после 505-го хода Васи в отмеченной коробке окажется 1011 спичек, и он выиграет, так как до этого ни в какой коробке не лежало больше, чем 2⋅505 = 1010 спичек.

**5.***Делители натурального числа n (включая n и 1), имеющего больше трёх делителей, выписали по возрастанию: 1 = d1 < d2 … < dk = n. Разности u1 = d2−d1, u2 = d3−d2, …, u**k–1 = dk−dk−1  оказались такими, что
u2–u1 = u3–u2 = … = uk–1–uk–2. Найдите все такие n.* (С. Берлов)

Ответ. 10. Решение. Пусть *n* нечётно. Тогда *uk*–1 = *dk*–*dk*–1 ≥ *n*–*n*/3 = 2*n*/3. При этом *uk*–2 = *dk*–1–*dk*–2 < *dk*–1 ≤ *n*/3, поэтому *uk*–1–*uk*–2 > *n*/3, но *uk*–1–*uk*–2 = *uk*–2–*uk*–3 < *uk*–2 < *n*/3 — противоречие. В случае чётного *n* получится
*uk*–1 = *dk*–*dk*–1 = *n*/2, *uk*–2 = *dk*–1–*dk*–2 = *n*/2–*dk*–2, поэтому *uk*–1–*uk*–2 = *dk*–2. Но *u*2–*u*1 = *d*3–2*d*2+*d*1 = *d*3–3, что может быть равно *dk*–2 только при *k* = 4. Тогда *dk*–2 = *d*2 = 2, *d*3 = *n*/2 = *d*2+3 = 5 и *n* = 10.