Первый тур дистанционного этапа XVI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Семь различных камней таковы, что любые шесть из них вместе весят меньше 6 кг. Докажите, что все семь камней вместе весят меньше 7 кг.*(Фольклор)

Решение. Допустим, семь камней вместе весят не меньше 7 кг. Уберем любой камень. Оставшиеся шесть камней по условию весят меньше 6 кг. Значит, выкинутый камень весит больше килограмма. Но если любой из семи камней весит больше килограмма, то любые шесть камней весят больше 6 кг. Противоречие.

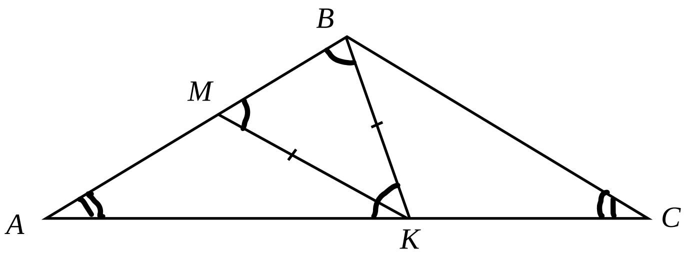
2. *Назовем пару* различных *натуральных чисел* ***хорошей****, если одно из них делится на другое. Найдите такие 20 натуральных чисел, среди которых нет равных, что если выписать все возможные пары этих чисел, то количество хороших среди них будет равно 101. (Каждая пара записывается один раз. Порядок чисел в парах не учитывается, то есть пары (a, b) и (b, a) считаются за одну.)*

Не забудьте объяснить, почему найденные вами числа действительно дают ровно 101 хорошую пару, не больше и не меньше. Ответы без объяснения не засчитываются. (И. Рубанов, С. Берлов)

Ответ. Подойдут, например, числа $2, 2^2, \ldots, 2^{14}, 3, 3^2, \ldots, 3^5, 5$. Решение. Из чисел $2, 2^2, \ldots, 2^{14}$ любое делится на любое другое. Из этих чисел можно образовать $14\cdot 13/2 = 91$ пару. Из чисел $3, 3^2, \ldots, 3^5$ также любое делится на любое другое. Из них можно образовать $5\cdot 4/2 = 10$ пар. В остальных парах приведенных в ответе чисел никакое не делится на другое. Замечание. Есть искомые двадцатки, устроенные и по-другому, например, $2, 2^2, \ldots, 2^{14}, 3\cdot 2^{10}, 5, 7, 11, 13, 17$. Здесь к 91 паре, получающейся из степеней двойки, добавляется 10 пар из числа $3\cdot 2^{10}$ и чисел $2, 2^2, \ldots, 2^{10}$.

3. *В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) точка M — середина стороны AB, а точка K на стороне AC такова, что $\angle ABK = \angle BKA$. Оказалось, что KB = KM. Докажите, что 2AC = 3AB.* (С. Берлов)

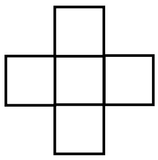
Решение. Положим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle ABK = \angle BKA = \beta$. Так как $KB = KM$, $\angle KMB = \angle MBK = \beta$, откуда $\angle AKM = 180° - \angle AMK - \angle MAK = 180° - (180° - \beta) - \alpha = \beta - \alpha$ и $\angle CBK = 180° - \angle BCK - \angle BKC = 180° - (180° - \beta) - \alpha = \beta - \alpha$. Таким образом, $\angle AKM = \angle CBK$. Заметим также, что $KB = KM$ по условию и $BC = AB = AK$, так как углы при основании BK треугольника BAK по условию равны. Значит, треугольник AKM равен треугольнику CBK по двум сторонам и углу между ними, откуда $KC = AM = AB/2$ и $AC = AK + KC = AB + AB/2 = 3AB/2$. Осталось умножить полученное равенство на 2.



4. *Пять положительных чисел таковы, что сумма их кубов меньше суммы их квадратов. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 2.*(И. Рубанов)

Решение. Возьмем пять положительных чисел a, b, c, d, e, и пусть $a \ge 2$. Тогда $a^3 - a^2 = a^2(a-1) \ge 4\cdot(2-1) = 4$, то есть $a^3 \ge a^2 + 4$. Заметим также, что при $x > 0$ $x^3 + 1 > x^2$, так как при $x < 1$ $1 > x^2$, а при $x \ge 1$ $x^3 \ge x^2$. Поэтому $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 \ge a^2+4+b^3+c^3+d^3+e^3 \ge a^2+(b^3+1)+(c^3+1)+(d^3+1)+(e^3+1) > a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$, что противоречит условию задачи.

5. *При каких натуральных n, больших 5, клетчатый квадрат размером $n\times n$ клеточек можно без остатка разрезать на прямоугольники из двух клеток и кресты из пяти клеток так, чтобы получились фигуры обоих этих видов? Крест из пяти клеток изображен на рисунке справа.* (И. Рубанов)



Ответ. При всех чётных n, больших 5. Решение. Как разрезать на прямоугольники из двух клеток и кресты из пяти клеток квадрат 6×6, показано на рисунке. Чтобы разрезать нужным образом квадрат $2n\times 2n$ при $n \ge 4$, разрежем его сначала на находящийся в углу квадрат 6×6 и квадраты 2×2, затем квадрат 6×6 разрежем как показано на рисунке, а каждый из квадратов 2×2 разрежем на два прямоугольника из двух клеток.

Возьмем теперь квадрат с нечетной стороной и покрасим его клетки в два цвета в шахматном порядке. Тогда в каждом прямоугольнике из двух клеток будет по одной клетке каждого цвета, а в каждом кресте из пяти клеток центральная клетка будет одного цвета, а все остальные — другого, то есть клеток одного цвета будет на 3 меньше, чем другого. Если бы нам удалось разрезать такой квадрат на прямоугольники из двух и кресты из пяти клеток, то разность между количествами клеток одного и другого цвета в нем делилась бы на 3. На самом же деле эти количества в квадрате с нечетной стороной отличаются на 1. Значит, квадрат с нечетной стороной требуемым образом разрезать нельзя.