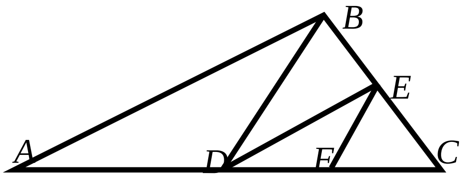
Второй тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Одно из чисел a, b, c положительно, одно — отрицательно, одно — равно 0. Определите, какое из чисел положительно, какое — отрицательно, и какое равно 0, если известно, что $ab^2(a+c)(b+c) < 0$.*

Ответ. $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$. Решение. Если бы нулю равнялось a или b, то произведение из условия тоже равнялось бы нулю. Значит, нулю равно c. Таким образом, произведение из условия равно a^2b^3. Поскольку $a^2 > 0$, то $b^3 < 0$. Следовательно, $b < 0$, откуда $a > 0$.

2. *В треугольнике ABC провели биссектрису BD, в треугольнике BDC — биссектрису DE, а в треугольнике DEC — биссектрису EF. Оказалось, что прямые BD и EF параллельны. Докажите, что угол ABC вдвое больше угла BAC.*



Решение. Из условия следует, что $\angle ABD = \angle EBD = \angle CEF = \angle DEF = \angle BDE$. Таким образом, внутренние накрест лежащие углы ABD и BDE при пересечении прямой BD прямыми AB и DE равны. Следовательно, $AB \parallel DE$, откуда $\angle BAC = \angle EDF = \angle EDB = \angle ABD = \angle ABC/2$, что и требовалось доказать.

3. *Вася написал на 99 карточках по одному числу (среди этих чисел могли быть и равные) и положил карточки по кругу числами вниз. Для каждой пары соседних карточек он сообщил Пете, какие числа написаны на этих карточках, но не сообщил, какое число на какой карточке. Мог ли Вася подобрать числа так, чтобы Петя не смог по этим данным наверняка выяснить про каждую карточку, какое число на ней написано?*

Ответ. Не мог. Решение. Заметим, что Пете достаточно определить число на какой-то одной карточке: рассматривая пары из неё и соседних карточек, мы узнаем числа на соседних карточках, и, продвигаясь таким же образом далее, узнаем числа на всех карточках. Покажем, что Петя сможет это сделать.

Рассмотрим три подряд идущие карточки. Пусть про первые две известно, что на них написаны числа a и b, а про две последние — что на них написаны числа a и c. Если числа b и c различны или $a = b$, то понятно, что на средней карточке написано число a, и задача решена. Получается, что Петя не может определить числа на карточках только тогда, когда на каждой паре соседних карточек написаны одни и те же числа a и b. Но этот случай невозможен, потому что тогда числа a и b чередуются по кругу, и количество карточек должно быть чётным, а число 99 нечётно.

4. *Перед тем, как приступить к решению задачи, Коля посмотрел на часы. Был второй час дня. Потратив на решение ровно час, Коля снова посмотрел на часы и заметил, что угол между часовой и минутной стрелками остался прежним. Когда Коля начал решать задачу?*

Ответ. В 1 час $8^2/_{11}$ мин или в 1 час $40^{10}/_{11}$ мин. Решение. Пусть в момент, когда Петя посмотрел на часы, было x минут второго. Так как за минуту минутная стрелка проходит 6°, а часовая — 0,5°, то часовая стрелка в этот момент образовывала с направлением на 12 часов угол в $30°+0{,}5x°$, а минутная — угол в $6x°$. За час минутная стрелка совершила полный оборот и оказалась на прежнем месте, а часовая повернулась на 30°. Очевидно, минутная стрелка будет направлена вдоль прямой, делящей пополам угол между двумя положениями часовой стрелки. Значит, $6x° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$, если минутная стрелка лежит внутри угла, образованного двумя положениями часовой, либо $6x°–180° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$, если нет. Решая эти два уравнения, получаем два указанных выше ответа.

5. *Какое наименьшее количество различных чисел можно выбрать таким образом, чтобы каждое выбранное число равнялось сумме каких-то трёх других различных выбранных чисел?*

<u>Ответ</u>. Семь. <u>Решение</u>. *Пример*. –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. *Оценка*. Пусть n — наибольшее из выбранных чисел. Если $n \le 0$, все остальные выбранные числа отрицательны, и сумма любых двух из них меньше каждого из слагаемых, а, значит, не может равняться n. Следовательно, $n > 0$. Те два из выбранных чисел, сумма которых равна n, тоже должны быть положительными, иначе их сумма будет меньше n. Итак, среди выбранных чисел должно быть по крайней мере три положительных. Рассматривая наименьшее из выбранных чисел, аналогичным образом убеждаемся, что среди выбранных чисел должно быть по крайней мере три отрицательных. Следовательно, всего должно быть выбрано не менее шести чисел.

Допустим, выбрано ровно шесть чисел: $a < b < c < d < e < f$. Из доказанного выше следует, что $c < 0 < d$. Поменяв, если нужно, знаки всех чисел на противоположные, можно считать, что $d \le |c|$. Но тогда число f нельзя представить в виде суммы трёх других выбранных, так как даже $c+d+e \le e < f$.