Второй тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Четыре мальчика заглянули в коробку, где лежат цветные шарики. На вопрос, каких цветов шарики там лежат, они ответили так. Петя: «Красные, синие и зелёные». Вася: «Красные, синие и жёлтые». Коля: «Красные, жёлтые и зелёные». Миша: «Жёлтые, зелёные и синие». Могло ли случиться, что каждый из мальчиков один цвет назвал верно, а два — неверно?* (Автор задачи — И. Рубанов)

Ответ. Не могло. Решение. Заметим, что каждый цвет назвали ровно три мальчика. Поэтому количество верно названных цветов, если считать каждый цвет столько раз, сколько его назвали, должно делиться на 3, и потому не может равняться 4.

2. *Докажите, что если $a+b+c+d = 0$ и $ab+cd+ac+bc+ad+bd = 0$, то $a = b = c = d = 0$.* (Фольклор)

Решение. Возводя равенство $a+b+c+d = 0$ в квадрат, получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+cd+ac+bc+ad+bd) = 0,$$

откуда $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, что возможно только при $a = b = c = d = 0$.

3. *Боря нарисовал девять отрезков, три из которых равны трём высотам треугольника ABC, три — трём биссектрисам, три — трём медианам. Оказалось, что для любого из нарисованных отрезков среди остальных восьми найдётся равный ему. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.* (И. Рубанов)

Решение. Пусть AA_1 — самая короткая из высот треугольника ABC. Если она равняется медиане AA_2 или биссектрисе AA_3, то треугольник, очевидно, равнобедренный. Если она равна медиане BB_2 или биссектрисе BB_3, то тогда AA_1 не короче высоты BB_1. Значит, она равна BB_1, так как по нашему предположению AA_1 — самая короткая из высот. Итак, всё свелось к случаю, когда $AA_1 = BB_1$. Но тогда прямоугольные треугольники ABA_1 и BAB_1 равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle A = \angle B$.

4. *По окружности красным карандашом записали 49 различных натуральных чисел, меньших 100. Между каждыми двумя соседними красными числами записали синим их наибольший общий делитель. Могло ли случиться, что все синие числа различны?* (И. Рубанов)

Ответ. Не могло. Решение. Заметим, что НОД двух различных чисел, меньших 100, должен быть меньше 50, так как хотя бы одно из этих двух чисел больше НОД по крайней мере вдвое. Поэтому если все синие числа различны, то среди них есть все числа от 1 до 49. В частности, среди них есть простое число 47. Оно может получиться только как НОД красных чисел 47 и 94. Тогда второе синее число, соседнее с красным числом 47, равно 1. Аналогично показывается, что среди красных чисел есть простые числа 41 и 43, и рядом с каждым из них также должна стоять синяя единица. Но тогда синих единиц должно быть по крайней мере две, так как одно синее число соседствует только с двумя красными. Противоречие.

5. *Палочка разломана на 15 частей так, что ни из каких трёх частей нельзя сложить треугольник. Докажите, что среди частей есть такая, которая длиннее трети исходной палочки.* (Фольклор)

Решение. Упорядочим части по длине: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{15}$. По неравенству треугольника длина каждой части не меньше суммы длин любых двух более коротких частей. Поэтому при любом $k \leq 13$ имеем $a_k \geq a_{k+1}+a_{k+2} \geq 2a_{k+2}$, откуда $a_{k+2} \leq a_k/2$. Отсюда получаем:

$$a_3+a_5+\ldots+a_{15} \leq a_3+a_3/2+\ldots+a_3/2^6 < 2a_3, \quad a_2+a_4+\ldots+a_{14} \leq a_2+a_2/2+\ldots+a_2/2^6 < 2a_2.$$

Следовательно, $a_2+a_3+\ldots+a_{14}+a_{15} < 2a_2+2a_3 \leq 2a_1$, откуда $a_1+a_2+\ldots+a_{14}+a_{15} < 3a_1$, что и требовалось доказать.