Второй тур дистанционного этапа XIII олимпиады имени Леонарда Эйлера
Решения задач

1. *Даны положительные числа a и b, удовлетворяющие условию $a^3+ab-b^3 = (a+b)^2$. Чему может быть равна разность $a-b$?*(Жюри)

Ответ. $a-b = 1$. Решение. $a^3+ab-b^3 = (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)+ab = a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow (a-b-1)(a^2+ab+b^2) = 0$. Так как $a^2+ab+b^2 > 0$, то $a-b-1 = 0$, откуда и получаем ответ.

2. *В стране Анчурии провели выборы президента. По всем избирательным участкам была разослана директива, что действующий президент Мирафлорес на каждом участке должен набрать более 95% голосов. Для этого на всех участках выбрали ближайшее кратное 100 число, большее количества избирателей на этом участке, после чего отсчитали 95% от этого числа и записали в протокол как проголосовавших за Мирафлореса. После подсчёта по всем участкам оказалось, что Мирафлорес набрал более 100% голосов. Докажите, что на каком-то участке было менее 2020 избирателей.* (С. Берлов)

Решение. Из условия следует, что на каждом участке для нахождения 95% завышали число избирателей не более чем на 100 человек. Если на участке было не меньше 2020 избирателей, то после завышения их оказывалось не меньше, чем 2100. Но тогда 95% от завышенного числа избирателей были по крайней мере на 105 человек меньше этого завышенного числа и, следовательно, меньше истинного числа избирателей на участке. Поэтому если бы на каждом из участков было не меньше 2020 избирателей, то сумма голосов по всем участкам была меньше 100% от числа избирателей в стране, что противоречит условию задачи.

3. *В автобусе ехали мужчины и женщины, всего 32 человека. Каждый из пассажиров знаком ровно с одним мужчиной и ровно с одной женщиной из остальных. N пассажиров одновременно узнали некоторую новость. Далее каждую минуту новость узнавал от кого-то из своих знакомых ещё один пассажир, причём если это была женщина, то новость в этот момент уже знали оба её знакомых. Через несколько минут оказалось, что новость знают все пассажиры. При каком наименьшем N такое могло случиться?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. 8. Решение. Пусть каждый пассажир возьмётся за руки с обоими своими знакомыми. Очевидно, после этого образуется один или несколько хороводов, в каждом из которых пары мужчин будут чередоваться с парами женщин. Пусть в хороводе $2k$ мужчин. Тогда женщин там тоже $2k$, а всего в хороводе $4k$ пассажиров. Таким образом, мужчин и женщин среди пассажиров поровну, то есть по 16.

Назовём тех, кто узнал новость первыми, *первоисточниками*. Заметим, что та из двух знакомых женщин, которая узнала новость первой, является первоисточником — в противном случае ее знакомая должна была бы узнать новость раньше. Так как пар знакомых женщин у нас 16:2 = 8, то и первоисточников минимум 8, то есть $N \geq 8$.

Покажем, что N может равняться 8. Пусть в каждой паре знакомых женщин первая по часовой стрелке является первоисточником, а среди мужчин первоисточников нет. Тогда можно организовать дело так, что через 8 минут окажется, что каждая женщина-первоисточник поделилась новостью со знакомым мужчиной (после чего ее узнали по одному мужчине из каждой пары знакомых), через следующие 8 минут каждый знающий новость мужчина поделился ею со своим не знающим новости знакомым и, наконец, в течение последних 8 минут новость узнали все не знавшие ее вначале женщины: ведь через 16 минут новость знали все мужчины и по одной женщине из любых двух знакомых женщин.

4. *AH — высота равнобедренного треугольника ABC (AB = BC). HK — высота треугольника AHB. Оказалось, что 4HK = AB. Чему могла быть равна градусная мера угла ABC? Принимаются только ответы, данные в виде целых чисел или десятичных дробей.* (С. Берлов)

Ответ. 15°, 75°, 105°, 165°. Решение. Пусть точка M — середина стороны AB. Тогда $HM = AB/2 = 2HK$, поэтому $\angle HMK = 30°$. Разберем возможные случаи.

Пусть угол B острый. Если точка M лежит на отрезке KA, то в равнобедренном треугольнике HMB угол при вершине M равен 30°, значит, при основании $\angle B = 75°$. Если же точка M лежит на отрезке KB, то в равнобедренном треугольнике HMB угол при вершине M равен 150°, значит, $\angle B = 15°$.

Пусть угол B тупой. Если точка M лежит на отрезке KA, в равнобедренном треугольнике HMB угол при вершине M равен 30°, значит, угол при основании равен 75°, а смежный с ним угол B равен 105°. Если же точка M лежит на отрезке KB, то в равнобедренном треугольнике HMB угол при вершине M равен 150°, значит, угол при основании равен 15°, а тогда смежный с ним угол B равен 165°.

5. *У Васи есть 20 гирь, среди которых нет трёх, равных по весу. Он может разложить эти все гири как на 10, так и на 11 куч с равными весами. Докажите, что у Васи найдутся две гири, веса которых различаются ровно в 4 раза.* (С. Берлов)

Решение. Пусть все гири вместе весят 110 условных единиц. Если гири разложены на 11 куч с равными весами, то хотя бы в двух кучах лежит по одной гире — иначе гирь было бы не меньше, чем $2\cdot10+1 = 21$. Очевидно, эти гири весят по 10, и они — самые тяжелые. Поскольку трёх гирь одинакового веса по условию нет, остальные гири весят меньше 10, и потому в каждой из оставшихся 9 куч не меньше двух гирь. Так как всего оставшихся гирь — 18, в каждой из оставшихся 9 куч — ровно две гири. Таким образом, среди 20 наших гирь две весят по 10, а остальные разбиваются на пары общим весом 10 каждая.

Разложим теперь все гири на 10 куч с равными весами. Вес каждой такой кучи — 11, а каждая гиря весит не больше 10, поэтому в каждой куче — не меньше двух гирь, а значит — ровно две. Отметим каждую гирю точкой на плоскости, каждые две гири, попавшие в одну кучу при раскладывании на 11 куч равного веса, соединим синей линией, а каждые две, попавшие в одну кучу при раскладывании на 10 куч равного веса — красной линией. Из гирь весом 10 выходит по одной красной линии в гири весом 1, а из всех остальных гирь — по одной красной и одной синей линии. Из гирь весом 1 выходят синие линии в гири весом 9, из гирь весом 9 — красные линии в гири весом 2, из гирь весом 2 — синие линии в гири весом 8. Ну а 8 в 4 раза больше, чем 2, что и завершает доказательство.