**Второй тур дистанционного этапа XIV олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1**. *В 9:00 в путь отправился пешеход. Через час вслед ему из того же начального пункта выехал велосипедист. В 10:30 он догнал пешехода и поехал дальше, но через некоторое время велосипед сломался. Закончив ремонт, велосипедист поехал вслед пешеходу дальше и в 13:00 снова догнал его. Сколько минут занял ремонт? (Скорость пешехода постоянна, и он двигался без остановок, скорость велосипедиста тоже постоянна, и он двигался с единственным перерывом на ремонт.)* (И. Рубанов)

Ответ. 100 минут. Решение. Велосипедист догнал пешехода через полчаса после своего старта и через полтора часа после старта пешехода. Значит, он движется втрое быстрее пешехода. До места второй встречи с велосипедистом пешеход шёл 4 часа = 240 минут. Если бы велосипедист ехал без остановки на ремонт, он доехал бы до этого места за 240 : 3 = 80 минут. На самом же деле он потратил на это 3 часа = 180 минут. Значит, на ремонт он потратил 180–80 = 100 минут.

**2**. *Можно ли отметить несколько клеток в таблице 9×9, чтобы в любых двух соседних строках таблицы было отмечено не меньше 6 клеток, а в любых двух соседних столбцах — не больше 5 клеток?* (С. Берлов)

Ответ. Можно. Решение. Один из примеров — на рисунке справа.

Комментарий. Покажем, как можно придумать такой пример. В парах строк 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 не меньше 6х4 = 24 отмеченных клеток. С другой стороны, в парах столбцов 2-3, 4-5, 6-7, 8-9 не больше 5х4 = 20 отмеченных клеток. Поэтому в первом столбце не меньше 4 отмеченных клеток. Аналогично показывается, что не меньше 4 отмеченных клеток в 3, 5, 7 и 9 столбцах. Теперь уже нетрудно построить пример с рисунка или аналогичный ему, где в каждом нечетном столбце ровно по 4 отмеченных клетки, в каждом четном столбце — по одной, а в каждой четной строке — ровно 6.

Допустим, в одном из столбцов 5 отмеченных клеток. Тогда во соседних с ним столбцах отмеченных клеток нет, значит в соседних с ними нечетных столбцах отмеченных клеток снова по 5 и т. д., то есть во всех нечетных столбцах по 5 отмеченных клеток, а во всех четных отмеченных клеток нет. Эти соображения приводят к другой серии примеров, где во всех нечетных строках по 5 отмеченных клеток, а во всех четных — по одной (читатель легко построит такой пример сам). Из проведенных рассуждений следует, что других разновидностей примеров, кроме описанных нами, нет.

**3**. *ABCD ⎯ выпуклый четырёхугольник, где AB = 7, BC = 4, AD = DC, ∠ABD = ∠DBC. Точка E на отрезке AB такова, что ∠DEB = 90°. Найдите длину отрезка AE.* (Испания, fase local*,* 2020-2021)

Ответ. 1,5. Решение. Отложим от точки *B* на луче *BA* отрезок *BF* = *BC*. Треугольники *DBF* и *DBC* равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, *DF* = *DC* = *DA*, то есть *DE* ⎯ высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника *ADF*. Так как она является также и медианой, имеем *AE* = *AF*/2 = (*AB*−*BF*)/2 = (7−4)/2 = 1,5.

**4**. *Докажите, что если прямые y = kx+m, y = mx+n и y = nx+k на координатной плоскости имеют общую точку, то они совпадают.* (С. Токарев)

Решение. Пусть *k* ≥ *m* и *k* ≥ *n* (случаи, когда наибольшим коэффициентом является *m* или *n*, аналогичны). Пусть *a* — абсцисса какой-либо общей точки прямых. Тогда *ka+m* = *ma+n* = *na+k*, откуда (*k*–*m*)*a* = *n*–*m*, (*m*–*n*)*a* = *k*–*n* и (*n*–*k*)*a* = *m*–*k*.

Допустим, коэффициенты *k*, *m*, *n* попарно различны. Тогда *a* = (*n*–*m*)/(*k*–*m*) = (*k*–*n*)/(*m*–*n*), откуда
(*k*–*m*)(*k*–*n*) = –(*n*–*m*)2. Но по нашему предположению *k* > *m* и *k* > *n*, поэтому левая часть последнего равенства положительна и не может равняться правой, которая не положительна. Значит, рассматриваемый случай невозможен.

Допустим, *k* = *m*. Тогда *n*–*m* = (*k*–*m*)*a* = 0, откуда *m* = *n* = *k*, и прямые совпадают. Случаи *k* = *n* и *m* = *n* рассматриваются аналогично.

**5**. *Даны натуральные числа a и b (a > 1), причём b делится на a2. Кроме того, любой делитель числа b, меньший, чем , является также делителем числа a. Докажите, что у числа a не более трех различных простых делителей.* (А. Голованов, И. Богданов)

Решение. Допустим, у числа *a* есть четыре различных простых делителя *p*, *q*, *r* и *s*. Тогда *a* = *pkqlrmsnc*, где *k*, *l*, *m*, *n* ≥ 1 и *c* ⎯ некоторое натуральное число. не делящееся на *p*, *q*, *r* и *s*. С точностью до выбора обозначений можно считать, что *pk* ⎯ наименьший из первых четырех сомножителей в этом разложении. Тогда *p*4*k* < *pkqlrmsn*≤ *a*, то есть *p*2*k* < **. Но так как *b* делится на *a*2, то *b* делится и на *p*2*k*, и получается, что *a* должно делиться на *p*2*k*, что противоречит нашему построению.