

Второй тур дистанционного этапа XVII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Сегодня у меня и моей сестры день рождения. Вместе нам 26 лет, причем сестре в три раза меньше лет, чем мне будет тогда, когда нам вместе будет в пять раз больше лет, чем мне сейчас. Сколько сейчас лет моей сестре?* (Районный тур Одесской математической олимпиады 1991/92 года)

Ответ. 12 лет. Решение. Пусть мне сейчас x лет, а сестре — y лет. Нам вместе будет в 5 раз больше лет, чем мне сейчас, через $(5x - (x+y))/2 = 2x - y/2$ лет. Мне тогда будет $x + (2x - y/2) = 3x - y/2$ лет, а сестре сейчас треть от этого количества, то есть $x - y/6$ лет. Значит, $y = x - y/6$, откуда $x = 7y/6$. По условию $26 = x + y = 13y/6$, откуда $y = 12$.

2. *Три биссектрисы неравностороннего треугольника пересекаются в точке I. Докажите, что каждое из расстояний от точки I до вершин треугольника меньше длины средней по величине стороны треугольника.* (И. Рубанов)

Решение. Пусть ABC — данный треугольник. Заметим, что $\angle AIB = 180^\circ - \angle A/2 - \angle B/2 = 90^\circ + \angle C/2$. Значит, угол $\angle AIB$ — тупой. Аналогично, тупыми являются углы $\angle AIC$ и $\angle BIC$. Рассмотрим отрезок AI . Он лежит против острых углов в тупоугольных треугольниках AIB и AIC . Поэтому он короче отрезков AB и AC , лежащих в этих треугольниках против тупых углов. Среди этих двух отрезков есть либо средняя по величине, либо наименьшая сторона треугольника ABC . В обоих случаях отрезок AI короче средней по величине стороны треугольника ABC . Для отрезков BI и CI доказательство аналогично.

3. *В каждой клетке шахматной доски стоит нуль. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Петя каждым своим ходом выбирает какой-то квадрат из четырех клеток и к каждому из чисел, стоящих в этом квадрате, прибавляет нуль или единицу, по своему выбору (выбор для каждой из четырех клеток совершается отдельно, то есть может случиться, что в некоторых клетках прибавляется нуль, а в некоторых — единица). Вася своим ходом выбирает какую-то клетку и прибавляет к стоящему в ней числу нуль или единицу, по своему выбору. Петя хочет, чтобы после 2024-го хода (т. е., после того как он и Вася сделают по 1012 ходов) на доске было как можно больше нечетных чисел. Какое наибольшее количество нечетных чисел он может получить независимо от действий Васи?* (С. Берлов)

Ответ. 48. Решение. Пете надо разбить доску на 16 квадратов 2×2 и первыми 16-ю своими ходами прибавить ко всем числам в каждом из них по единице. Вася за первые 16 своих ходов сможет заменить четными числами не более 16 из этих единиц, так что после 32 ходов на доске будет не менее 48 нечетных чисел. Далее Пете достаточно каждый раз прибавлять единицу к одному из стоящих на доске четных чисел, а к остальным числам из содержащего эту клетку квадрата 2×2 — по нулю (или прибавлять ко всем числам выбранного квадрата по 0, если на доске все числа нечетные). Тогда после каждого хода Пети, начиная с 33-го, на доске будет не меньше 49 нечетных чисел, а после каждого хода Васи, начиная с 33-го — не меньше 48. Васе же, для того, чтобы после каждого его хода на доске было минимум 16 четных чисел, надо отметить 16 клеток на пересечениях нечетных (считая слева) вертикалей доски с нечетными (считая снизу) ее горизонталями, и каждым своим ходом восстанавливать четность числа в той клетке, в которой она была нарушена (а если нигде не была — прибавить 0 к любой клетке). Это возможно, так как в каждый квадрат 2×2 попадает ровно одна отмеченная клетка.

4. *Целые числа x, y, z, t таковы, что $x + y + z + t = 0$. Сколько различных натуральных значений, не превосходящих 10000, может принимать число $(xy - zt)(xz - yt)(yz - xt)$?* (Л. Самойлов, С. Берлов)

Ответ. 50. Решение. Заметим, что $xy - zt = x(-x - z - t) - zt = -(x^2 + xz) - (xt + zt) = -(x + z)(x + t)$. Аналогично доказывается, что $xz - yt = -(x + z)(x + t)$ и $yz - xt = -(y + x)(y + t) = (x + y)(x + z)$. Перемножая, получаем, что

$$(xy - zt)(xz - yt)(yz - xt) = (x + y)^2(x + z)^2(x + t)^2$$

Таким образом, все искомые натуральные значения — это квадраты натуральных чисел от 1 до $\sqrt{10000} = 100$. Заметим, что среди чисел $x + y$, $x + z$, $x + t$ есть четное, так как иначе число x имеет одну четность, а три других числа — другую, и сумма $x + y + z + t$ вопреки условию задачи нечетна. Поэтому нам подходят только квадраты четных чисел. При этом любой четный квадрат подходит: у уравнения $2n = (x + y)(x + z)(x + t)$ при любом целом n есть целочисленное решение $x = n + 1$, $y = n - 1$, $z = t = -n$.

5. *Числа от 1 до 1000000 разбили на 100000 десятков (то есть групп от $10a + 1$ до $10a + 10$) и в каждом десятке покрасили одно число в красный цвет, а другое в зеленый. Докажите, что можно выбрать несколько (не более 50) красных чисел и столько же зеленых чисел так, чтобы сумма выбранных красных чисел была равна сумме выбранных зеленых.* (А. Голованов)

Решение. Рассмотрим первую тысячу десятков и разобьем ее на 500 первых десятков и 500 следующих. В первых 500 десятках рассмотрим 499 пар, состоящие из красного числа и зеленого в следующем десятке. Заметим, что в каждой паре разность зеленого и красного чисел положительна и меньше 20. По принципу Дирихле найдется 20 пар с одинаковой разностью, равной $0 < a < 20$. Аналогично, если в первом десятке брать зеленое число и красное в следующем десятке, во второй пятидесятке десятков найдется 20 пар с одинаковой

разностью красного и зеленого, равной $0 < b < 20$. Тогда, если выбрать b пар из первого десятка и a пар из второго, будет выбрано по $a+b < 40$ чисел каждого цвета, а сумма их разностей (если из красного всегда вычитать зелёное) будет равна 0.