Третий тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач и указания по проверке и оценке.

1. *Перед распродажей ложка и вилка стоили одинаково. На распродаже цену ложки уменьшили на 1 рубль, а цену вилки — в 10 раз. Могло ли случиться, что ложка на распродаже продавалась дешевле вилки?*

Ответ: Могло. Решение. Пусть начальная цена была 1 р. 10 коп. Тогда на распродаже ложка стоила 10 коп., а вилка — 11 коп. Замечание. Пусть x — начальная цена в копейках. Тогда x должно быть больше 100 (поскольку цена ложки на распродаже должна быть положительной), делиться на 10 (поскольку цена вилки на распродаже должна выражаться целым положительным числом копеек) и удовлетворять неравенству $x–100 < x/10 \Leftrightarrow x < 111\ 1/9$. Таким образом, $x = 110$ — *единственная* цена, удовлетворяющая всем перечисленным условиям.

Указания. Для полного балла достаточно верного примера. Ответ «могло» без примера — *0 баллов*. Примеры, где цена вилки на распродаже равна не положительному (в том числе 0) или не целому числу копеек, *не засчитываются*. Показано, что начальная цена должна удовлетворять неравенству $100 < x$ (коп.) $< 111\ 1/9$, но дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Получено только неравенство x (коп.) $< 111\ 1/9$, а неравенства $x > 100$ и других содержательных продвижений нет — *2 балла*.

2. *Найдите все такие тройки чисел m, n, k, что каждое из уравнений $mx^2+n = 0$, $nx^2+k = 0$ и $kx^2+m = 0$ имеет хотя бы одно решение.*

Ответ: $m = n = k = 0$. Решение. Если $m = 0$, то из $mx^2+n = 0$ получаем $n = 0$, а из $nx^2+k = 0$ — $k = 0$. Аналогично для $n = 0$ и $k = 0$. Таким образом, если одно из чисел m, n, k равно 0, то равны 0 и два других. Допустим, ни одно из чисел m, n, k не равно 0. Тогда из первого уравнения следует, что числа m и n имеют разные знаки, а из второго — что числа n и k имеют разные знаки. Но тогда числа m и k имеют один знак, и в третьем уравнении $x^2 = –m/k < 0$, то есть оно не имеет решений. Полученное противоречие показывает, что отличными от 0 числа m, n и k быть не могут. Замечание. То, что каждое из уравнений, указанных в условии, имеет решение, не означает, что все три уравнения имеют *одно и то же* решение. Поэтому доказательство, что у системы из трех данных уравнений есть решение только при $m = n = k = 0$, не является решением задачи.

Указания. Только ответ — *0 баллов*. Ответ плюс доказательство, что если одно из чисел m, n, k равно 0, то и остальные — тоже — *1 балл*. Показано, что все три числа не могут быть отличными от 0, но не показано, что если одно из чисел m, n, k равно 0, то и остальные — тоже (как правило, это решение в предположении, что x^2 всегда положительно) — *4 балла*. Истолкование задачи как исследования системы из трех данных уравнений— грубая ошибка, *0 баллов*.

Внимание! По техническим причинам тем, кто решал задачу 2 в личных кабинетах, предлагалось ее условие, в котором выпал символ x: *Найдите все такие тройки чисел m, n, k, что каждое из уравнений $m^2+n = 0$, $n^2+k = 0$ и $k^2+m = 0$ имеет хотя бы одно решение*. В такой формулировке задача сохраняет смысл, но становится значительно легче, потому что теперь она в самом деле сводится к решению системы из трех данных уравнений, из которой получаем равенство $k = –n^2 = –m^4 = –k^8$, откуда либо $k = m = n = 0$, либо $k = m = n = –1$. **У тех, кто решал задачу в такой формулировке, оценивается фактически решавшаяся задача. Их результаты заносятся на отдельный лист «Задача без икса» таблицы результатов. Результаты тех, кто решал задачу 2 в правильной формулировке или не записал ее решения, заносятся в лист «Задача с иксом». Если в работе приведены решения задачи в обеих формулировках, занесите результаты в лист, соответствующий решению, которое оценено выше.**

Указания по задаче без икса. Только ответ — *0 баллов*. Нет проверки ответа, если по ходу решения она необходима — *снимается 1 балл*. В результате деления на выражение, которое может обращаться в 0, потеряно решение $k = m = n = 0$, остальное верно — *3 балла*. Вообще не учитывается, что k, m, n могут быть нулями — *не более 3 баллов*. Показано, что m, n, k могут равняться только 0 или –1, но не показано, что $m = n = k$ — *4 балла*. Составлено уравнение $m^8+m = 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*. То же плюс указано, что корни этого уравнения — 0 и –1 (но не сказано, что $k = m = n$) — *3 балла*. Составлено уравнение $m^8+m = 0$, указаны его корни, сказано, но не доказано, что $k = m = n$ — *4 балла*.

3. *В 1001 году на багдадском базаре ковёр-самолёт стоил 1 динар. Затем в течение 99 лет он каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год подорожал в 3 раза. Мог ли в 1100 году такой же ковёр-самолёт стоить 152 динара?*

Ответ: Не мог. Первое решение. Если бы ковёр-самолёт каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год не дорожал бы совсем, то в 1100 году он стоил бы 1+98 = 99 динаров. Значит, в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавились 152–99 = 53 динара. Но в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавляется удвоенная его стоимость, то есть чётное число, а число 53 — нечётное. Второе решение. В год, когда цена утроилась, её чётность не изменилась, а остальные 98 лет чётность менялась каждый год. Поэтому с 1001 по 1100 год чётность цены менялась чётное количество раз. Следовательно, в 1100 году цена, как и в 1001 году, была нечётной, и 152 динара ковер стоить не мог. Третье решение. За 98 лет, когда цена ковра росла на 1 динар, он подорожал на 98 динаров, а в тот год, когда его цена возросла втрое, к его цене в предыдущем году прибавилась удвоенная такая же цена. Поэтому чем позже ковер подорожал втрое, тем больше его цена в 1100 году. Если ковер подорожал втрое в 1027 году, то в 1100 году он будет стоить $3 \cdot 26+(1100–1027) = 151$ динар, а если в 1028 году — то $3 \cdot 27+(1100–1028) = 153$ динара. При подорожании втрое позже 1028 года он будет в 1100 году стоить больше 153 динаров, а раньше 1027 года — меньше 151 динара. Следовательно, 152 динара в 1100 году ковер стоить не мог.

Указания. Только ответ — *0 баллов*. Показано, что при подорожании втрое в 1027 году ковер в 1100 году будет стоить 151 динар, а при подорожании втрое в 1028 году — 153 динара, но не объясняется, почему из этого следует ответ — *2 балла*. То же, плюс соображения монотонности (чем позже ковер подорожал втрое, тем больше он стоит в 1100 году) без обоснования — *4 балла*. Ошибка на единицу из-за неправильного учета краевого эффекта — *оценка не выше 3 баллов* (*как правило, 0 баллов*). Верно составлено, но не решено диофантово уравнение (или приведен только его ответ без объяснения, почему других ответов нет) — *3 балла*. На основании нескольких числовых примеров утверждается, что в 2100 году ковер будет стоить нечетное число динаров, содержательного продвижения в обосновании нет — *1 балл*.

4. *Точка D лежит внутри треугольника ABC. Может ли случиться, что самая короткая сторона треугольника BCD равна 1, самая короткая сторона треугольника ACD равна 2, а самая короткая сторона треугольника ABD равна 3?*

Ответ: Не может. Решение. Поскольку по условию $AD \geq 3$ и $CD \geq 2$, в треугольнике BCD единице может равняться только BC, а в треугольнике ACD двойке может равняться CD или AC. Но в обоих случаях не выполнено неравенство треугольника: если $AC = 2$, то $AB \geq 3 = BC+AC$ в треугольнике ABC, а если $CD = 2$, то $BD \geq 3 = BC+CD$ в треугольнике BCD.

Указания. Доказано только, что $BC = 1$ — *1 балл*. Неполный перебор случаев — *не более 2 баллов*. Без доказательства используется тот факт, что всякий отрезок с концами, принадлежащими треугольнику, не длиннее наибольшей стороны этого треугольника — *не более 3 баллов*.

5. *Шестизначное число N совпадает с каждым из пяти шестизначных чисел A, B, C, D, E в трёх разрядах. Докажите, что среди чисел A, B, C, D, E найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах.*

Решение. Запишем число N и поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом A. Затем поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом B и т.д. В итоге мы поставим 15 крестиков. Значит, найдётся разряд, под которым крестиков не меньше трёх. Поэтому среди чисел A, B, C, D, E найдутся три, совпадающие в одном из разрядов (назовём его *отмеченным*). Оставим только крестики, соответствующие этим числам и не стоящие в отмеченном разряде. Их шесть, а не отмеченных разрядов — пять, поэтому среди них найдутся два, стоящие в одном разряде. Числа, соответствующие этим крестикам — искомые: они совпадают в этом разряде, а также в отмеченном.

Указания. Перебор случаев, существенно не доведённый до полного решения — *0 баллов*. Не рассмотрен только случай, когда есть два числа, не совпадающие ни в одном разряде — *3 балла*. Не рассмотрен только случай, когда есть три числа, совпадающие в одном и том же разряде — *3 балла*. Рассмотрен только пример, когда каждое из четырех чисел совпадает с каждым их остальных в одном разряде, причем разбор случая, когда есть три числа, совпадающие в одном и том же разряде, не вытекает из проведенных рассуждений — *1 балл*.