Третий тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Улитка ползет вокруг циферблата часов против часовой стрелки с постоянной скоростью. Она стартовала в 12.00 с отметки 12 часов, и закончила полный круг ровно в 14.00. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой?*

Ответ. 12-40 и 13-20. Решение. Из условия следует, что улитка двигается по циферблату в 2 раза медленнее минутной стрелки. Поэтому к 1-й встрече она проползает треть всего круга, а стрелка – две трети. Это означает, что первая встреча происходит в 12-40. Аналогично, между первой и второй встречей снова проходит 40 минут. Это означает, что вторая встреча случается в 13-20.

2. *В каждую клетку таблицы 2×2 вписано по одному числу. Все числа различны, сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Найдите сумму всех четырёх чисел.*

Ответ. 0. Решение. Пусть в верхней строке таблицы стоят (слева направо) числа a и b, а в нижней (слева направо) — числа c и d. По условию $a+b = c+d$ и $ac = bd$. Выражая c из первого уравнения и подставляя во второе, получаем $a(a+b-d) = bd \Leftrightarrow (a+b)(a-d) = 0$, откуда, поскольку $a-d \neq 0$, получаем $a = -b$. Аналогично, $d = -c$, откуда и получаем ответ.

3. *Биссектрисы углов A и C разрезают неравнобедренный треугольник ABC на четырёхугольник и три треугольника, причём среди этих трёх треугольников есть два равнобедренных. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ. 180°/7, 2·180°/7, 4·180°/7. Решение. Пусть AK и CM — биссектрисы, I — их точка пересечения. Посмотрим, какие углы в каких треугольниках могут быть равными. Треугольник AIC равнобедренным быть не может: в нём $\angle AIC = 90°+\angle ABC/2$ — тупой, а $\angle IAC = \angle BAC/2 \neq \angle BCA/2 = \angle ICA$. Невозможны также равенства $\angle MIA = \angle MAI$ и $\angle KCI = \angle KIC$, так как внешний угол треугольника AIC не может быть равен внутреннему, не смежному с ним. Наконец, невозможно одновременное выполнение равенств $\angle MIA = \angle IMA$ и $\angle KIC = \angle IKC$, или одновременное выполнение равенств $\angle IAM = \angle IMA$ и $\angle ICK = \angle IKC$, так как тогда $\angle BAC = \angle ACB$. Поэтому остаётся единственная (с точностью до перестановки точек A и C) возможность:

$$\angle AIM = \angle AMI = 90°-\angle ABC/2 = 90°-\angle BAC/4,\ \angle ICK = \angle IKC = \angle ACB/2 = 90°+\angle ABC/2-\angle ACB/2.$$

Это означает, что $2\angle ABC = \angle BAC$ и $\angle ACB = 90°+\angle ABC/2$. Тогда $7\angle ABC/2 = 90°$, что и приводит к ответу.

4. *Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть d_1 делится на d_k, d_2 — на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.*

Решение. Легко видеть, что выполняются равенства $N = d_1d_k = d_2d_{k-1} = \ldots$ Это позволяет переформулировать условие задачи следующим образом: если произведение двух делителей числа N равно этому числу, то больший из этих делителей делится на меньший. Пусть число N кроме простого делителя p имеет другие простые делители. Тогда N можно представить в виде произведения двух взаимно простых сомножителей, больших 1, что противоречит условию задачи. Поэтому число N есть степень простого числа, откуда и вытекает утверждение задачи.

5. *Двое играют в такую игру. За один ход можно положить в одну из клеток квадратной доски 1001×1001 один камешек (первоначально доска пуста; в одной клетке может лежать любое число камешков). Ходят по очереди. Как только в каком-то ряду (вертикали или горизонтали) оказывается более 5 камешков, сделавший последний ход признается проигравшим. Кто из игроков сможет выиграть независимо от действий соперника: тот, кто делает первый ход или тот, кто ходит вторым?*

Ответ. Первый. Первое решение. До того, как на доску выложен 5005-ый камешек, первый находит строку и столбец, в которых находится менее пяти камешков (такие обязательно найдутся), и кладёт камешек в клетку на их пересечении. Если второй не ошибся раньше, после того, как на доску будет положен 5005-ый камешек (а его, как и все нечётные, положит первый), мы приходим к ситуации, в которой в каждой строке и каждом столбце лежит ровно по 5 камешков. В ней второй проигрывает, какой бы ход он ни сделал. Второе решение. Пусть первым ходом первый положит камешек в центральную клетку доски, а затем кладет каждый свой камешек симметрично относительно центра доски последнему камешку соперника. Тогда если первый делает ход в строку или столбец, содержащий центральную клетку, там после этого хода будет нечетное числу камешков, а если камешек первого оказался в строке или столбце, не содержащем центральную клетку, там после его хода станет столько же камешков, сколько в симметричной относительно центра доски строке (столбце). Таким образом, если после хода первого в какой-то строке или каком-то столбце оказалось больше 5 камешков, то и до его хода были строка или столбец, где находилось больше 5 камешков. Значит, первый при такой игре не может проиграть, а так как игра конечна, то второй рано или поздно проиграет.