Третий тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *На берегах озера по кругу стоит 5 пристаней, на каждой человек, у одного из них одноместная лодка. Люди с соседних пристаней в ссоре, и встречаться друг с другом не хотят. Как каждому из них перебраться на соседнюю по часовой стрелке пристань, если передвигаться можно только по озеру?*

<u>Решение</u>. Достаточно проплыть два раза против часовой стрелки по образованной диагоналями звёздочке. Первые 5 рейсов: $1 \to 4$, $4 \to 2$, $2 \to 5$, $5 \to 3$, $3 \to 1$. Каждый сдвинулся на две позиции против часовой стрелки, то есть на пристанях с 1-й по 5-ю находятся люди №№ 3, 4, 5, 1, 2 соответственно. Теперь каждый может плыть на нужную ему пристань, поскольку находящемуся там он готов передать лодку: $3 \to 4$, $1 \to 2$, $4 \to 5$, $2 \to 3$, $5 \to 1$.

2. *В марсианском парламенте заседают депутаты трёх партий: «Гласные», «Согласные» и «Шипящие» — по 50 депутатов от каждой партии. На голосование был поставлен проект закона «О реконструкции марсианских каналов». После голосования по 30 депутатов от каждой партии сказали, что они проголосовали «за», по 10 сказали, что проголосовали против, а остальные сказали, что воздержались. Известно, что из «согласных» депутатов сказали правду те и только те, кто поддержал законопроект, из «гласных» — те и только те, кто проголосовал против, а из «шипящих» — воздержавшиеся. Законопроект считается принятым, если за него подано не менее 50% голосов. Был ли принят законопроект?*

<u>Ответ</u>. Нет. <u>Решение</u>. Те из «гласных» или «шипящих», кто голосовал «за», врали, то есть ответили, что голосовали «против» или воздержались. В обеих партиях так ответили всего по 20 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 40 человек. Те из «согласных», кто голосовал «за», говорили правду, то есть ответили, что голосовали «за». В партии «Согласные» так ответили 30 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 30 человек. Значит, суммарно по трём партиям «за» проголосовало не более 70 человек. А 50% голосов — это 75 человек. Поэтому проект не прошёл.

3. *В треугольнике ABC угол C в 2 раза больше угла B, CD — биссектриса. Из середины M стороны BC опущен перпендикуляр MH на отрезок CD. На стороне AB нашлась такая точка K, что KMH — равносторонний треугольник. Докажите, что точки M, H и A лежат на одной прямой.*

<u>Первое решение</u>. Так как $\angle DCB = \angle C/2 = \angle B$, DM — медиана, биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике BDC. Опустим из точки M перпендикуляр ME на прямую AB. Тогда $ME = MH = MK$, откуда $K = E$. Далее, в прямоугольных треугольниках CHM и BKM сумма углов при вершине M равна $180°-\angle HMK = 120°$, откуда получаем, что каждый из углов DCM и DBM равен $30°$. Поэтому в треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 90°$. Осталось заметить, что тогда треугольник ACM — равносторонний, и потому $CH \perp AM$, откуда и вытекает утверждение задачи.

<u>Второе решение</u>. Рассмотрим треугольники CHM и KMB. В них равны по две стороны и по углу (правда, лежащему не между равными сторонами), причём треугольник CHM прямоугольный. Но треугольники с двумя равными сторонами и равной парой углов могут не быть равными только, если один из них тупоугольный, а другой остроугольный. Значит, треугольники CHM и KMB равны, откуда $CH = BK$ и $\angle AKM = \angle CHM = 90°$. Далее рассуждаем как в первом решении.

4. *На доске написали 10 натуральных чисел. Если отметить любые три из написанных чисел, то сумма всех трёх будет делиться на два числа из этой тройки. Докажите, что среди написанных чисел есть равные.*

<u>Первое решение</u>. Если $a \le b \le c \le d \le e$ — пять из данных чисел, то из сумм $a+d+e$, $b+d+e$, $c+d+e$ две должны делиться на одно и то же из чисел d и e. Но разность этих двух сумм равна разности каких-то двух из чисел a, b, c, и потому меньше d. Значит, она равна 0, и, следовательно, среди чисел a, b, c есть два равных.

<u>Второе решение</u>. Пусть в наборе все числа различны. Возьмем три наименьших числа: $a < b < c$. Рассмотрим любое из оставшихся чисел x и две тройки $\{a, c, x\}$, $\{b, c, x\}$. Обе суммы $a+c+x$ и $b+c+x$ не могут делиться на c одновременно, поскольку разность между второй и первой суммой положительна, но меньше c. Значит, хотя бы одна из этих сумм делится на x. Но $a+c < 2x$ и

$b+c < 2x$, поэтому выполнено одно из равенств $a+c = x$ или $b+c = x$. Получается, что любое число, не входящее в первую тройку, равно сумме двух чисел из этой тройки. Но тогда различных чисел во всём наборе не более шести.

Замечание. Продолжая рассуждение, проведенное в первом решении, нетрудно показать, что среди данных чисел есть по крайней мере семь равных.

5. *Существуют ли такие два числа, что первое больше второго в 2016 раз, а сумма его цифр меньше суммы цифр второго в 2016 раз?*

Ответ. Да, существуют. Решение. Рассмотрим, например, число A вида 11..15, где количество единиц больше 10. Умножая A на 2016, получаем:

$$11\ldots15\times2016 = 10080+20160+201600+2016000+\ldots+201600\ldots0 = 2240\ldots.007840$$

(тут образуется много девяток ввиду $2+0+1+6 = 9$, но они все исчезают за счет бегущего перехода через десяток). Сумма цифр произведения равна 27 независимо от количеств единиц в записи числа A. Чтобы сумма цифр числа A была в 2016 раз больше, в его записи должно быть $27\times2016-5$ единиц.