Третий тур дистанционного этапа XIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Велосипедисты Андрей, Борис и Виктор одновременно, из одной точки и в одном направлении стартовали по кольцевой дороге. Каждый из них ехал с постоянной скоростью, причем у разных велосипедистов скорости были различными. Андрей впервые перегнал Бориса, проехав ровно четыре круга, а Виктора — проехав ровно пять кругов. Сколько кругов проехал Виктор к моменту, когда он впервые обогнал Бориса?* (Фольклор)

Ответ. 16. Решение. Пусть Андрей едет со скоростью $20v$. В момент, когда он, проехав 4 круга, впервые перегнал Бориса, тот проехал 3 круга. Поэтому скорость Бориса составляет 3/4 скорости Андрея, то есть $15v$. В момент, когда Андрей, проехав 5 кругов, впервые перегнал Виктора, тот проехал 4 круга. Поэтому скорость Виктора равна 4/5 скорости Андрея, то есть $16v$. Таким образом, скорость Бориса составляет 15/16 от скорости Виктора, и потому Виктор впервые обгонит Бориса, проехав 16 кругов (Виктор к этому моменту проедет 15 кругов).

2. *Графики функций $y = k_1x+b_1$, $y = k_2x+b_2$, $y = k_3x+b_3$ являются продолжениями сторон равностороннего треугольника. Докажите, что среди чисел k_1, k_2, k_3 есть такое, которое не меньше 1/2.* (И. Рубанов)

Решение. Проведем через начало координат параллельные сторонам нашего равностороннего треугольника прямые $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$. Они поделят полный угол на углы по 60°, и потому хотя бы одна из них проходит через первую четверть. Если она образует с осью абсцисс угол, не меньший 30°, то ее коэффициент k_i не меньше 1/2. В противном случае следующая против часовой стрелки прямая тоже проходит через первую четверть и образует с осью абсцисс угол, не меньший 30° (и даже 60°) так что подойдет она.

3. *Игорь нарисовал на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см архипелаг, в котором каждый остров имеет форму многоугольника, составленного из клеток, и разные острова не имеют общих точек. Может ли отношение суммарной длины береговой линии всех островов к их суммарной площади равняться:* ***а)*** *5;* ***б)*** *3,99?* (И. Рубанов)

Ответ. а) Не может. б) Может. Решение. а) Разрежем фигуру на клеточки. При этом суммарная площадь клеточек будет равна площади фигуры, а суммарный периметр клеточек будет не меньше периметра фигуры. Но суммарная площадь k отдельных клеточек равна k кв. см, а их суммарный периметр — $4k$, что меньше, чем $5k$, откуда и вытекает ответ.

б) Таков, например, архипелаг из 198 одноклеточных островов и одного двухклеточного.

4. *В трапеции ABCD биссектриса угла B пересекает основание AD в точке L. Точка M — середина стороны CD. Прямая, параллельная BM и проходящая через L, пересекает сторону AB в точке K. Оказалось, что угол BLM — прямой. Найдите отношение BK/KA.* (С. Берлов)

Ответ. 2. Решение. Продолжим отрезок BM до пересечения с прямой AD в точке N, а отрезок LK — до пересечения с прямой BC в точке P. Положим $LD = x$, $BC = y$. Треугольники BCM и NDM равны ($MC = MD$, $\angle CMB = \angle DMN$, $\angle BCM = \angle MDN$), поэтому $DN = BC = y$. $PLNB$ — параллелограмм, поэтому $PB = LN = LD+DN = x+y$.

Так как $\angle ALB = \angle LBC = \angle ABL$, высота AE треугольника BAL является его медианой. Следовательно, EM — средняя линия трапеции $BLDC$, откуда $EM = (BC+LD)/2 = (x+y)/2$. Поскольку прямые AE и LM перпендикулярны BL, они параллельны, и $AEML$ — параллелограмм, откуда $AL = EM = (x+y)/2 = PB/2$.

Используя подобие треугольников PKB и LKA, теперь можно закончить решение сразу: $BK/KA = PB/LA = 2$. Чтобы обойтись без подобия, рассмотрим середины U и V отрезков PK и BK соответственно. Так как $UV = PB/2 = AL$, треугольники UVK и LAK равны, откуда $KB = 2KV = 2KA$.

5. *Таня и Маша по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 1000, причем число 13 выписывать нельзя. Начинает Таня. Проигрывает та девочка, после хода которой на доске впервые появятся два одинаковых числа или два числа, отличающиеся на 17. Кто из девочек выиграет при правильной игре, и как ей для этого надо играть?* (И. Рубанов)

Ответ. Таня. Решение. Разобьём все числа от 1 до 1000 на 17 арифметических прогрессий с разностью 17 (будем называть их *полями*): 1, 18, 35, …, 987; 2, 19, 36, …, 988; …; 12, 29, 46, …, 998; 30, 47, …, 999; 14, 31, 48, …, 1000; 15, 32, 49, …, 984; …; 17, 34, 51, …, 986. Так как $1000 = 17\cdot58+14$, каждое из первых 12 полей и 14-е поле будут иметь длину 59 (назовем эти поля *длинными*), а каждое из остальных четырех (в том числе то, где отсутствует запрещенное число 13) — длину 58 (назовем эти поля *короткими*). Отметим, что запрет выписывать число, отличающееся на 17 от уже выписанного, теперь можно описать как запрет выписывать число, соседнее в своем поле с уже выписанным.

Пусть Таня предварительно разобьет все короткие поля на две пары и все длинные поля, кроме первого, на 6 пар. Первым ходом Таня выпишет на доску среднее число первого длинного поля: $1+17\cdot29$, а дальше играет так. Если Маша выписала на доску число $a = 1+17k$ из первого длинного поля, Таня выписывает число $1+17\cdot(58-k)$ из того же поля. Если же Маша выписала m-ое по счету число из любого другого поля, Таня выписывает m-ое число из парного поля.

Заметим, что при такой игре Тани после каждого ее хода в каждом поле, кроме первого длинного, будут выписаны те же по счету числа, что и в парном ему поле. В первом же длинном поле после каждого хода Тани набор из всех использованных чисел будет симметричен относительно среднего числа. Поэтому если Маша смогла сделать свой очередной ход, не нарушив правил, то и Таня сможет, не нарушая правил, сделать ответный ход. Следовательно, Таня не может проиграть, а так как не позднее 999-го хода игра закончится, то проиграет Маша.