**Третий тур дистанционного этапа XVI олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.***Мотоциклист был в пути три часа (какое-то время он мог и стоять). Его средняя скорость в первые два часа равнялась 50 км/ч и в последние два часа — тоже 50 км/ч. Какое наибольшее расстояние он мог преодолеть?* (Фольклор)

Ответ. 200 км. Решение. Если мотоциклист первый и третий часы пути ехал со скоростью 100 км/ч, а второй час стоял, то он преодолел 200 км, а его средняя скорость как в первые так и в последние два часа пути равнялась 100/2 = 50 км/ч. Больше 200 км он проехать не мог, так как за первые два часа проехал 100 км, и за последний час — не более 100 км, так как 100 км он проехал за последние два часа.

Ответ с примером без оценки, как и ответ с оценкой без примера оцениваются *из 3 баллов*.

**2.***Три числа таковы, что куб суммы любых двух из них равен сумме их кубов. Докажите, что среди этих чисел есть нуль.* (И. Рубанов)

Решение. Обозначим наши числа через *x*, *y* и *z*. Пусть среди них нет нуля. По условию   
0 = (*x*3+*y*3)–(*x*+*y*)3 = (*x*+*y*)(*x*2–*xy*+*y*2–(*x*+*y*)2) = –3*xy*(*x*+*y*). Так как *x* и *y* — не нули, то *x*+*y* = 0, то есть   
*x* = –*y*. Аналогично доказывается, что *y* = –*z* и *z* = –*x*. Но тогда *x* = –*y* = –(–*z*) = *z* и –*z* = *z*, откуда *z* = 0.

**3.***Вася хочет несколько раз выписать в строчку число 12345 так, чтобы получившееся многозначное число делилось на 41. Какое наименьшее число раз ему нужно это сделать?* (А. Голованов)

Ответ. 41. Решение. Представим искомое число в виде

*N* = 12345+12345⋅105+12345⋅1010+…+12345⋅105(*k*–1),

где *k* — количество экземпляров числа 12345, выписанных Васей. Число 105–1 = 99999 делится на 41. Значит, при любом натуральном *s* делится на 41 число 105*s* – 1 = 99…99, записываемое 5*s* девятками. Поэтому делится на 41 и число *N*–12345*k* = 12345((105–1)+(1010–1)+…+(105(*k*–1)–1)). Значит, чтобы *N* делилось на 41, необходимо и достаточно, чтобы на 41 делилось число 12345*k*. Поскольку 41 простое, а 12345 на 41 не делится, наименьшее подходящее *k* равно 41.

**4.***В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга. Сколько учеников в этом классе?* (Факт из теории графов)

Ответ. 16. Решение. Пусть *A* — ученик, *B*1, …, *B*6 — его друзья, а *X* — некоторый ученик, отличный от *A*. По условию у *X* должно быть ровно два друга среди *B*1, …, *B*6. С другой стороны, у любых двух друзей *Bi* и *Bj* ученика *A* есть единственный общий друг *X*, отличный от *A*. Поэтому учеников, отличных от *A*, в классе столько же, сколько различных пар, составленных из друзей *A*, то есть 6⋅5/2 = 15, а всего учеников 15+1 = 16.

**5.***Шестиугольник**, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что площадь этого шестиугольника не меньше 6.* (И. Рубанов)

*D*

*E*

*F*

*A*

*B*

*C*

*X*

*Z*

*Y*

Решение. Так как площади треугольников *ABC* и *BCD* по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание *BC*. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины *A* и *D* лежат с одной стороны от прямой *BC*. Поэтому прямые *BC* и *AD* параллельны. Аналогично, *EF* || *AD*, *CD* || *BE* || *AF*, *AB* || *CF* || *DE*.

Пусть диагонали *AD* и *BE* пересекаются в точке *X*, диагонали *BE* и *CF* — в точке *Y*, диагонали *CF* и *AD* — в точке *Z*. С точностью до выбора обозначений можно считать, что точка *X* принадлежит трапеции *ABCF* (см. рисунок). Тогда наш шестиугольник можно разбить на параллелограммы *ABCZ*, *AFEX*, *EDCY* и треугольник *XYZ* (который может выродиться в точку). Площадь каждого из трех перечисленных параллелограммов равна 2, так как половину каждого из них составляет один из треугольников, площадь которого по условию равна 1 (например, для параллелограмма *ABCZ* это треугольник *ABC*). Площадь шестиугольника не меньше суммы площадей этих параллелограммов, откуда и вытекает утверждение задачи.