**Третий тур дистанционного этапа XVII олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.***Скоростное шоссе, по которому можно ехать со скоростью 150 км/ч, идет параллельно обычному, по которому можно ехать со скоростью 100 км/ч. Проехать 1 км по скоростному шоссе стоит 3 рубля, а по обычному — 1 рубль. Мише надо проехать из Ёлкина в Палкино, до которого 100 км. У него есть 250 рублей. За какое наименьшее время он может добраться до Палкина? Считаем, что разгон, торможение и переход с одного шоссе на другое происходят мгновенно.* (И. Рубанов)

Ответ. За 45 минут. Решение. Понятно, что для того, чтобы как можно быстрее доехать до Палкина, нам надо проехать по скоростному шоссе как можно большее расстояние. Значит, мы должны проехать по скоростному шоссе такое расстояние *x*, чтобы оставшихся 250–3*x* рублей в точности хватило для проезда оставшихся 100–*x* километров до Палкина по обычному шоссе. Из уравнения 250–3*x* = 1⋅(100–*x*) находим *x* = 75 км. Значит, наименьшее время, за которое Миша может добраться от Ёлкина до Палкина, составляет 75/150+(100–75)/100 = 3/4 часа = 45 минут.

**2.***Сумма двадцати чисел равна 0. Докажите, что можно покрасить десять из них в красный цвет, а какие-то девять из оставшихся — в синий так, что сумма девяти синих чисел будет не меньше, чем сумма десяти красных.* (А. Голованов)

Решение. Пусть *a*1 ≤ *a*2≤ … ≤ *a*10 — десять наименьших, а *b*1, …, *b*9 — девять наибольших из данных чисел. Очевидно, *a*1 ≤ 0. Поэтому *a*1+…+*a*10 ≤ *a*2+…+*a*10 ≤ *b*1+…+*b*9.

**3.***При каких n, больших 2, можно расставить в клетках таблицы размером n×n крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в каждом столбце таблицы, кроме одного, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждой строке таблицы, кроме одной, ноликов было больше, чем крестиков?* (И. Рубанов)

Ответ. При всех нечетных *n*. Решение. *Пример*. Пусть *n* = 2*k*+1 нечетно. Выделим в таблице квадрат 2*k*×2*k*, находящийся в левом верхнем углу. Разобьем его на четыре квадрата *k*×*k*. Левый верхний и правый нижний из этих квадратов целиком заполним крестиками, а остальные два — ноликами. Затем крайний правый столбец таблицы целиком заполним ноликами, а во всех клетках нижней строки, кроме самой правой, поставим крестики. Теперь в каждом столбце таблицы, кроме самого правого, стоит *k*+1 крестиков и *k* ноликов, а в каждой строке, кроме самой нижней — *k*+1 ноликов и *k* крестиков. *Оценка.* Пусть *n* = 2*k* четно. Тогда в каждом из
2*k*–1 столбцов таблицы, где крестиков больше, чем ноликов, крестиков должно быть по крайней мере *k*+1. Значит, всего в таблице должно быть по крайней мере (2*k*–1)(*k*+1) = 2*k*2+*k*–1 > 2*k*2 крестиков (так как по условию *n* > 2, то *k* > 1), то есть больше половины общего числа 4*k*2 клеточек таблицы. Но из рассмотрения строк таким же образом получается, что больше половины общего числа клеточек таблицы должно быть заполнено ноликами. Полученное противоречие показывает, что при четном *n* таблицу нужным образом заполнить нельзя.

**4.***Есть две кучки по 11 монет в каждой. Известно, что в каждой кучке 10 настоящих монет и одна фальшивая, которая легче настоящей.* *Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые — тоже. Можно ли за* ***одно*** *взвешивание на чашечных весах гарантированно найти не менее 8 настоящих монет?* (К. Кноп)

Ответ. Можно. Решение. Положим на одну чашу весов 8 монет из кучки А, а на другую — оставшиеся 3 монеты из кучки А и 5 монет из кучки Б. Так как все монеты из кучки А — на весах, там есть хотя бы одна фальшивая монета. Если одна из чашек перевесит, то все монеты на ней — настоящие, и задача решена. Если же весы в равновесии, то там есть фальшивая монета из кучки Б, и мы нашли даже 9 настоящих монет: 3 монеты из кучки А, лежащие на чаше вместе с монетами из кучки Б, и 6 монет из кучки Б, не лежащие на весах.

**5.***Сторона BC выпуклого четырехугольника ABCD видна из середины M его стороны AD под углом 90°. Биссектрисы треугольника BMC пересекаются в точке I. Известно, что ÐABM = ÐMIC и ÐBIM = ÐMCD. Докажите, что AI = DI.* (А. Кузнецов)

Решение. Положим ∠*MBC* = 2β, ∠*MCB* = 2γ. Из треугольника *BMC* имеем 90º+2β+2γ = 180º, откуда β+γ = 45º. По условию Ð*ABM* = Ð*MIC* = 135º–γ, Ð*BIM* = Ð*MCD* = 135º–β. Пусть *C*′ — точка, симметричная точке *C* относительно точки *M*. Так как *BM* — медиана и высота треугольника *CBC*′, ∠*BC*′*C* = ∠*BCC*′ = 2γ. Так как прямая *AC*′ симметрична прямой *DC* относительно точки *M* и потому параллельна ей, ∠*MC*′*A* = ∠*MCD* = 135º–β. Значит, ∠*BC*′*A* = ∠*MC*′*A*–∠*BC*′*C* = 135º–β–2γ = 90º–γ = 45º+β = 180º–∠*MC*′*A*.

Далее, ∠*MBC*′ = 180º–∠*BMC*′–∠*BC*′*M* = 90º–2γ, откуда ∠*ABC*′ = 45º+γ и 180º–∠*ABM* = 45º+γ. Следовательно, *C*′*A* и *BA* — биссектрисы внешних углов треугольника *BMC*′. Поэтому точка *A* лежит на биссектрисе его внутреннего угла *BMC*′, откуда ∠*AMB* = 45º и ∠*AMI* = 90º. Таким образом, *IM* — медиана и высота треугольника *AID*, откуда *AI* = *DI*.