Третий тур дистанционного этапа XVII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. Скоростное шоссе, по которому можно ехать со скоростью 150 км/ч, идет параллельно обычному, по которому можно ехать со скоростью 100 км/ч. Проехать 1 км по скоростному шоссе стоит 3 рубля, а по обычному — 1 рубль. Мише надо проехать из Ёлкина в Палкина, до которого 100 км. У него есть 250 рублей. За какое наименьшее время он может добраться до Палкина? Считаем, что разгон, торможение и переход с одного шоссе на другое происходят мгновенно. (И. Рубанов)

Ответ. За 45 минут. Решение. Понятно, что для того, чтобы как можно быстрее доехать до Палкина, нам надо проехать по скоростному шоссе как можно большее расстояние. Значит, мы должны проехать по скоростному шоссе такое расстояние x , чтобы оставшихся $250-3x$ рублей в точности хватило для проезда оставшихся $100-x$ километров до Палкина по обычному шоссе. Из уравнения $250-3x = 1 \cdot (100-x)$ находим $x = 75$ км. Значит, наименьшее время, за которое Миша может добраться от Ёлкина до Палкина, составляет $75/150 + (100-75)/100 = 3/4$ часа = 45 минут.

2. Сумма двадцати чисел равна 0. Докажите, что можно покрасить десять из них в красный цвет, а какие-то девять из оставшихся — в синий так, что сумма девяти синих чисел будет не меньше, чем сумма десяти красных. (А. Голованов)

Решение. Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}$ — десять наименьших, а $b_1, \dots, b_9$ — девять наибольших из данных чисел. Очевидно, $a_1 \leq 0$. Поэтому $a_1 + \dots + a_{10} \leq a_2 + \dots + a_{10} \leq b_1 + \dots + b_9$.

3. При каких n , больших 2, можно расставить в клетках таблицы размером $n \times n$ крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в каждом столбце таблицы, кроме одного, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждой строке таблицы, кроме одной, ноликов было больше, чем крестиков? (И. Рубанов)

Ответ. При всех нечетных n . Решение. Пример. Пусть $n = 2k+1$ нечетно. Выделим в таблице квадрат $2k \times 2k$, находящийся в левом верхнем углу. Разобьем его на четыре квадрата $k \times k$. Левый верхний и правый нижний из этих квадратов целиком заполним крестиками, а остальные два — ноликами. Затем крайний правый столбец таблицы целиком заполним ноликами, а во всех клетках нижней строки, кроме самой правой, поставим крестики. Теперь в каждом столбце таблицы, кроме самого правого, стоит $k+1$ крестиков и k ноликов, а в каждой строке, кроме самой нижней — $k+1$ ноликов и k крестиков. Оценка. Пусть $n = 2k$ четно. Тогда в каждом из

$2k-1$ столбцов таблицы, где крестиков больше, чем ноликов, крестиков должно быть по крайней мере $k+1$. Значит, всего в таблице должно быть по крайней мере $(2k-1)(k+1) = 2k^2+k-1 > 2k^2$ крестиков (так как по условию $n > 2$, то $k > 1$), то есть больше половины общего числа $4k^2$ клеточек таблицы. Но из рассмотрения строк таким же образом получается, что больше половины общего числа клеточек таблицы должно быть заполнено ноликами. Полученное противоречие показывает, что при четном n таблицу нужным образом заполнить нельзя.

4. Есть две кучки по 11 монет в каждой. Известно, что в каждой кучке 10 настоящих монет и одна фальшивая, которая легче настоящей. Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые — тоже. Можно ли за **одно** взвешивание на чашечных весах гарантированно найти не менее 8 настоящих монет? (К. Кноп)

Ответ. Можно. Решение. Положим на одну чашу весов 8 монет из кучки А, а на другую — оставшиеся 3 монеты из кучки А и 5 монет из кучки Б. Так как все монеты из кучки А — на весах, там есть хотя бы одна фальшивая монета. Если одна из чашек перевесит, то все монеты на ней — настоящие, и задача решена. Если же весы в равновесии, то там есть фальшивая монета из кучки Б, и мы нашли даже 9 настоящих монет: 3 монеты из кучки А, лежащие на чаше вместе с монетами из кучки Б, и 6 монет из кучки Б, не лежащие на весах.

5. Сторона BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ видна из середины M его стороны AD под углом 90° . Биссектрисы треугольника BMC пересекаются в точке I . Известно, что $ABM = MIC$ и $BIM = MCD$. Докажите, что $AI = DI$. (А. Кузнецов)

Решение. Положим $\angle MBC = 2\beta$, $\angle MCB = 2\gamma$. Из треугольника BMC имеем $90^\circ + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, откуда $\beta + \gamma = 45^\circ$. По условию $ABM = MIC = 135^\circ - \gamma$, $BIM = MCD = 135^\circ - \beta$. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно точки M . Так как BM — медиана и высота треугольника BVC' , $\angle BC'C = \angle BCC' = 2\gamma$. Так как прямая AC' симметрична прямой DC относительно точки M и потому параллельна ей, $\angle MC'A = \angle MCD = 135^\circ - \beta$. Значит, $\angle BC'A = \angle MC'A - \angle BC'C = 135^\circ - \beta - 2\gamma = 90^\circ - \gamma = 45^\circ + \beta = 180^\circ - \angle MC'A$. Далее, $\angle MBC' = 180^\circ - \angle BMC' - \angle BCM = 90^\circ - 2\gamma$, откуда $\angle ABC' = 45^\circ + \gamma$ и $180^\circ - \angle ABM = 45^\circ + \gamma$. Следовательно, $C'A$ и BA — биссектрисы внешних углов треугольника BMC' . Поэтому точка A лежит на биссектрисе его

внутреннего угла BMC' , откуда $\angle AMB = 45^\circ$ и $\angle AMI = 90^\circ$. Таким образом, IM — медиана и высота треугольника AID , откуда $AI = DI$.