X МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

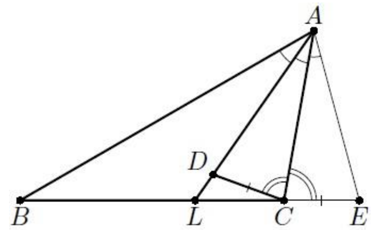
6. *На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?* (Методкомиссия)

Ответ. 39…998 (223 девятки). **Решение**. Так как $2018 = 9\cdot 224+2$, самым маленьким числом с суммой цифр 2018 будет 29…9 (224 девятки), а вторым по величине — число 389…9 (223 девятки) В 223 следующих по величине числах с суммой цифр 2018 восьмёрка «путешествует» из начала в конец ряда девяток, каждый раз смещаясь на один знак. Через 223 шага она окажется в конце числа, что и даёт нам ответ.

7. *В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник.* (И. Рубанов)

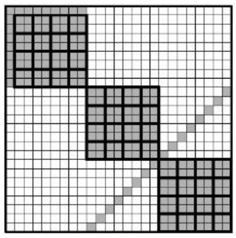
Решение. Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивалось на 1, в полночь на столе лежал 61 многоугольник. Допустим, у каждого из этих многоугольников было не меньше пяти вершин. Тогда всего вершин у многоугольников на столе в полночь было по крайней мере $5\cdot 61 = 305$. Но при каждом разрезании суммарное число вершин увеличивалось на 2 (если разрез проходил через две вершины), 3 (если разрез проходил через одну вершину и одну точку внутри стороны) или 4 (если разрез проходил через две точки внутри сторон). Поэтому общее число вершин за 51 разрезание могло увеличиться не больше, чем на $51\cdot 4 = 204$, и потому суммарное число вершин в полночь не превосходило $100+204 = 304$. Противоречие.

8. *На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC+CD = AB$.* (А. Кузнецов)



Решение. На продолжении отрезка BC за точку C выберем точку E так, что $CD = CE$. Тогда $\angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 180^\circ - 4\alpha = \angle ACE$. Следовательно, треугольники ACD и ACE равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AEC = \angle ADC = 3\alpha$ и $\angle CAE = \angle CAD = \alpha$. Заметим, что $\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 3\alpha = \angle AEB$. Таким образом, треугольник ABE равнобедренный и $AB = BE = BC+CE = BC+CD$.

9. *На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?* (С. Берлов)



Решение. *Оценка*. Заметим, что если в строчке закрашено 9 клеток, то можно перекрасить четыре из них так, чтобы никакие две закрашенные клетки не были соседними: достаточно перенумеровать закрашенные клетки слева направо и перекрасить клетки с чётными номерами. Если сделать такие перекрашивания со всеми чётными строками, то перекрасится 48 клеток и не будет закрашенных квадратов 2×2, поскольку не будет двух соседних закрашенных клеток в одной чётной строке.

Пример. Закрасим расположенные вдоль главной диагонали непересекающиеся квадраты: первый со стороной 9 и два со стороной 8 — и клетки, расположенные по незакрашенной главной диагонали квадрата 16×16, содержащего квадраты 8×8. Тогда на доске можно будет выделить 48 не пересекающихся квадратов 2×2, все клетки которых закрашены. Поэтому в этом примере надо перекрасить не менее 48 клеток.

10. *Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.* (Р. Салимов)

Решение. Обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2 < n(n-1) \quad (*).$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{100}$. Допустим, $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = kp$. Из неравенства (*) вытекает, что $k < p-1$. Тогда, так как $S(q) = S(p)+p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, имеем $k+1 \geq q$. Но $k < p-1 < q-1$. Противоречие.