IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *10 бегунов стартуют одновременно: пятеро в синих майках с одного конца беговой дорожки, пятеро в красных майках — с другого. Их скорости постоянны и различны, причём скорость каждого бегуна больше 9 км/ч, но меньше 12 км/ч. Добежав до конца дорожки, каждый бегун сразу бежит назад, а, вернувшись к месту своего старта, заканчивает бег. Тренер ставит в блокноте галочку каждый раз, когда встречаются (лицом к лицу или один догоняет другого) двое бегунов в разноцветных майках (больше двух бегунов в одной точке за время бега не встречались). Сколько галочек поставит тренер к моменту, когда закончит бег самый быстрый из бегунов?* (И. Рубанов)

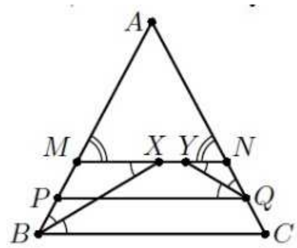
Ответ. 50. **Решение**. Покажем, что к моменту финиша самого быстрого бегуна любые двое разноцветных бегунов встретились ровно два раза, откуда и будет вытекать ответ $2\cdot5\cdot5 = 50$.

Пусть s (км) — длина дорожки. Положим $T = 2s/12$ (ч). Так как скорость самого быстрого бегуна меньше 12 км/ч, он дважды пробежит дорожку за время, большее T. Покажем, что все возможные встречи бегунов случатся раньше, чем после старта истечёт T часов.

Возьмём двух разноцветных бегунов. Первая их встреча случится, когда они вместе пробегут длину дорожки, и это произойдёт раньше, чем через $s/18 = T/3 < T$ часов. Когда более быстрый из этих двоих пробежит всю дорожку, более медленный, скорость которого составляет более $9/12 = 3/4$ скорости более быстрого, пробежит уже больше 3/4 длины дорожки и потому более быстрый, повернув, не успеет его догнать (для этого он должен был бы бежать по крайней мере вчетверо быстрее более медленного). Значит, вторая встреча этих двоих случится, когда оба будут бежать назад. К этому моменту они вместе пробегут расстояние $3s$, и это произойдёт раньше, чем через $3s/18 = T$ часов, что и завершает доказательство.

2. *Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.* (С. Волчёнков)

Решение. Пусть p — достаточно большое нечётное простое число. Представим число p^2 в виде суммы $a_1+\ldots+a_6$ различных натуральных чисел, не делящихся на p. Числа pa_1, …, pa_6 будут искомыми: произведение любых двух из них не делится на их сумму, равную p^3, а произведение любых трёх — делится. Пример получается уже при $p = 5$: разложение $25 = 1+2+3+4+6+9$ даёт набор чисел 5, 10, 15, 20, 30, 45.



3. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. На биссектрисах треугольников ABC и APQ, исходящих из вершин B и Q, выбраны точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Докажите, что $PX = CY$.* (А. Кузнецов, в редакции С. Берлова и И. Богданова)

Решение. Обозначим через M и N точки пересечения прямой XY со сторонами AB и AC соответственно. Заметим, что $\angle MXB = \angle XBC = \angle MBX = \angle NQY = \angle YQP = \angle NYQ$, поэтому $MX = MB = NC$ и $NY = NQ = MP$. Кроме того, $\angle CNY = \angle PMX$. Следовательно, треугольники PMX и YNC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $PX = YC$. **Замечание**. Аналогичное решение можно получить, обозначив через T точку пересечения BX и PQ и доказав, что треугольники PTX и CQY равны.

4. *Между городами страны организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города до каждого другого можно добраться (возможно, с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединён напрямую с A или с B. Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем с двумя пересадками.* (И. Богданов)

Решение. Пусть X и Y — произвольные два города, а $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ — маршрут между ними с наименьшим числом пересадок. Предположим, что $k \geq 3$. Тогда Z_2 не соединён рейсом ни с X, ни с Y, иначе наш маршрут можно бы было бы сократить, воспользовавшись этим рейсом. По условию, существует город B такой, что каждый город, отличный от Z_2 и B, соединён рейсом хотя бы с одним из них. Значит, каждый из городов X и Y либо соединён с B, либо сам является городом B. Но, если $X \neq B \neq Y$, то существует маршрут X, B, Y с одной пересадкой, в противном случае существует даже рейс между X и Y. В любом случае мы получили противоречие с выбором k. Значит, предположение неверно, и $k \leq 2$. В силу произвольности выбора X и Y требуемое утверждение доказано.