V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа

1. *Каждый из 10 гномов — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов — рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь», а оставшийся, Глоин, сказал: «Среди стоящих справа от меня есть рыцарь». Правду сказал Глоин или солгал?* (И. Рубанов)

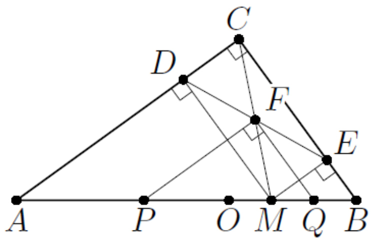
Ответ. Сказал правду. **Решение**. По условию, рыцари среди гномов есть. Возьмём самого левого из них. Он не мог сказать «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь». Значит, это и есть Глоин, и, следовательно, он говорит правду.

2. *На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.* (И. Богданов)

Решение. Пусть количество пар девочек на пути в музей было a, а на обратном пути — b. Значит, количества пар мальчиков на пути туда и обратно были равны $3a$ и $4b$ соответственно. Поскольку каждая из остальных пар состояла из мальчика и девочки, разность между количествами мальчиков и девочек составляет $2(3a–a) = 2(4b–b)$, откуда $2a = 3b$, и b делится на 2, то есть $b = 2c$ при некотором целом c.

Рассмотрим теперь ситуацию на пути обратно, выберем в ней c пар мальчиков и c пар девочек и перестроим их в разнополые пары. Останется c пар девочек и $7c$ пар мальчиков, что и требовалось.

3. *На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.* (Р. Женодаров)



Решение. Заметим, что $CDME$ — прямоугольник. Его диагонали делятся точкой пересечения пополам, поэтому точка F является серединой отрезка CM. Далее, отрезки PF и FQ — средние линии треугольников ACM и BCM соответственно. Значит, они параллельны взаимно перпендикулярным отрезкам AC и CB, то есть угол PFQ — прямой. Наконец, FO — медиана в прямоугольном треугольнике PFQ, проведённая к гипотенузе PQ. Так как точки P и Q фиксированы, длина $FO = PQ/2$ не зависит от выбора точки C, что и требовалось доказать.

4. *Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство (a+b+c+d+e+f) : (1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f) = 2012?* (Б. Трушин)

Ответ. Да, существуют. **Решение**. Положим, например, $a = 1$, $b = 2012$, $c = 2$, $d = 1006$, $e = 4$, $f = 503$; тогда $ab = cd = ef = 2012$. Значит,

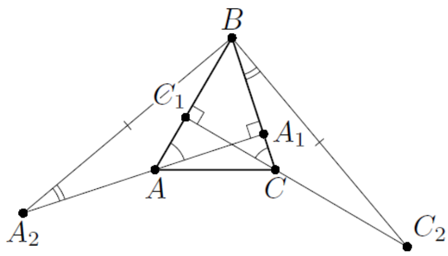
$$1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f = (a+b)/ab+(c+d)/cd+(e+f)/ef = (a+b+c+d+e+f)/2012,$$

откуда и следует требуемое равенство.

5. *У Синдбада в кошельке 11 внешне одинаковых динаров, среди которых, возможно, один фальшивый, отличающийся от настоящего по весу, но неизвестно в какую сторону. Как ему расплатиться с торговцем восемью настоящими динарами, если торговец разрешил два раза воспользоваться его чашечными весами, но без гирь?* (Л. Емельянов)

Решение. Выделим три кучки I, II, III по три монеты в каждой. Сравним кучки I и II, а затем — кучки II и III. Если все три кучки равны по весу, то все монеты в них настоящие, и мы нашли даже 9 монет. В противном случае одна из кучек отличается по весу от других, и нам известно — какая (если в одном из взвешиваний две кучки равны по весу, то фальшивая в третьей; иначе II отличается по весу как от I, так и от III, и фальшивая может быть только в II). Тогда искомые во-семь монет — это остальные две кучки и две неиспользованные монеты. **Замечание.** Приведённый способ — не единственный возможный.

6. *Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.* (Р. Женодаров)



Ответ. $\angle A_2BC_2 = \angle 90°$, $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = 45°$.

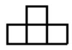
Решение. Треугольники ABA_2 и CC_2B равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CC_2$, $AA_2 = BC$, а углы BAA_2 и BCC_2 равны как смежные с углами A_1AB и C_1CB, равными $90°–\angle ABC$). Поэтому $\angle BA_2A = \angle CBC_2$, откуда $\angle A_2BC_2 = \angle A_2BA + \angle ABC + \angle CBC_2 = \angle ABC + (\angle A_2BA + \angle BA_2A) = \angle ABC + \angle BAA_1 = 90°$. Кроме того, $A_2B = C_2B$, откуда $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = (180° – \angle A_2BC_2)/2 = 45°$.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным и для не остроугольного треугольника *ABC*.

7. *Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?* (Н. Агаханов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Предположим противное: произведения *ab*, *bc* и *ca* оканчиваются, соответственно, двузначными числами n, n+1 и n+2. Среди этих трёх последовательных чисел обязательно найдется нечётное, значит, произведение каких-то двух из чисел a, b и c нечётно. Это означает, что по крайней мере два из чисел a, b и c нечётны. Но тогда третье число чётно, иначе все три произведения *ab*, *bc*, *ca* были бы нечётными, что невозможно.

Итак, среди произведений одно нечётное и два чётных числа, то есть число n чётно. Тогда число a чётно, а числа b и c нечётны. Теперь, если a делится на 4, то оба числа n и n+2 должны делиться на 4. Если же a не делится на 4, то числа n и n+2 также не делятся на 4. Однако из двух последовательных чисел n и n+2 одно обязательно делится на 4, а другое — нет. Противоречие.

8. *В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и –1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки*  *на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение **неудачным**, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.* (М. Антипов)

−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−

Ответ. 36. **Решение**. Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдётся хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной — e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S–a = S–b = S–c = S–d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Но в таком случае $e = –(a+b+c) = –3a$, что невозможно. Поскольку каждое расположение фигурки лежит не более, чем в одном кресте, получается, что в 36 крестах (с центрами во всех не крайних клетках) найдётся не менее 36 неудачных расположений. С другой стороны, на рисунке справа показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36 (в каждой клетке указан знак соответствующего числа). Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски — удачные.