**Леонард Эйлер атындағы олимпиадасының дистанциондық кезеңінің үшінші туры**

***Үшінші тур осы жылғы Киров олимпиадасының муниципиальдық кезеңінің мәліметтері бойынша құралған. Осы олимпиадаға қатысқандар бұл турды жаза алмайды.***

**1. Құрамындағы барлық сандардың көбейтіндісі 1000 болатын және екінші сан біріншісінен 5 есе көп болатын барлық бес таңбалы сандарды табыңыз.**

Жауабы. 15855, 15585, 15558. Шешуі. Бірінші цифр тек ге ғана тең бола алады, олай болмаса екінші цифр дан асып кетеді. Олай болса екінші цифр ке тең, және соңғы үш цифрының көбейтіңдісі тең болу керек екені шығады. 200 = 5х5х8 болғандықтан, үш санның екеуі 5ке тең болу керек. Бірақ ол жағдайда үшінші цифр сегіз болуы керек, бұл жерден есептің жауабын аламыз.

**2. а>b және (a-b)(b-c)(c-a) >0 орындалатын a,b,c сандары берілген. а үкен бе, әлде c үлкен ба?**

Жауабы. *a* > *c* . Шешуі. Берілген үш санның ішінде, тең сандар жоқ екені айқын. *a*>*b*, *a–b* > 0 болғандықтан, (*b–c*)(*c–a*) > 0 болады. *с* > *a* деп алып көрейік. Онда, *c–a* > 0 және *b–c* > 0 болады, яғни *b* > *c* > *a* — қарамақайшылық.

**3. Екі ойыншы кезекпен жазықтықта түзулер жүргізеді, бір түзуді екі рет жүргізуге болмайды. Түзу жүргізгеннен кейін пайда болған бөліктер саны бірінші рет 5 ке бөлінсе, сол түзуді жүргізген ойыншы жеңеді. Екеуі де дұрыс әдіспен ойнаған жағдайда кім жеңеді, жүрісті бірінші бастаған ойыншы ма, әлде оның қарсыласы ма, ол жеңу үшін қалай жүру тиіс?**

Жауабы. Екінші. Бірінші шешімі. Екінші өз жүрісімен, бірінші жүргізген түзуге параллель түзу жүргізеді. Егер өзінің екінші жүрісімен, бірінші жүргізілген екі түзуге параллель түзу жүргізсе, онда оның жүрісінен кейін жазықтық 4 бөлікке бөлінеді. Онда, екінші, жүргізілген үш түзуге параллель түзу жүргізеді де, жеңіп кетеді: бөлшектер саны 5ке тең болады. Егер де өзінің екінші жүрісімен, бірінші жүргізілген екі түзуге қиюшы түзу жүргізсе, онда оның жүрісінен кейін жазықтық 6 бөлікке бөлінеді. Онда, екінші, жүргізілген үш түзуге қиюшы түзу жүргізеді , және тағы да жеңіп кетеді, себебі 10 бөлік пайда болады. Екінші шешімі. Екінші өз жүрісімен, бірінші жүргізген түзуге қиюшы түзу жүргізеді. Егер өзінің екінші жүрісімен, бірінші жүргізілген екі түзудің біреуіне параллель түзу жүргізсе, немесе екеуінің қиылысу нуктесі арқылы түзу жүргізсе, оның жүрісінен кейін жазықтық 6 бөлікке бөлінеді. Онда, екінші, жүргізілген үш түзуді, үш әртүрлі нүктеде қиятың түзу жүргізеді де, ұтып кетеді, себебі бөлшектер саны 10 болады. Егер де өзінің екінші жүрісімен, бірінші, жүргізілген екі түзуді, екі әртүрлі нүктеде қиятың қиюшы түзу жүргізсе, онда оның жүрісінен кейін жазықтық 7 бөлікке бөлінеді. Онда, екінші, жүргізілген түзуге параллель және екеуінің қиылысу нүктесі арқыды өтпейтін түзу жүргізеді , және тағы да 10 бөлік пайда болады.

**4. АBC үшбұрышның BC қабырғасынан E нүктесі алынған. Ал ВD биссектрисасында ЕF║АС және АF = АD болатындай F нүктесі алынған. АВ=ВЕ болатынын дәлелдеңіз.**

Шешуі. Есептің шартынан ∠*EFD* = ∠*ADF* = ∠*AFD* екені шығады (бірінші теңдік дұрыс, себебі *EF || AC,* ал екінші *AF = AD*  болғандығынан дұрыс ). Сондықтан, *AFD* және  *EFD* бұрыштарымен іргелес *AFB* және *EFB* бұрыштары да өзара тең. Олай болса, *BFE* және *BFA* үшбұрыштары ортақ *BF* қабырғасы және сыбайлас бұрыштары бойынша тең. Сондықтан , олардың сәйкесінше *BE* және *AB* қабырғалыры да өзара тең.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *А* | *Б* | *В* | *Г* | *Д* | *Е* |
| *А* | х | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| *Б* | 0 | х | 3 | 3 | 1 | 0 |
| *В* | 0 | 0 | х | 3 | 3 | 1 |
| *Г* | 1 | 0 | 0 | х | 3 | 3 |
| *Д* | 3 | 1 | 0 | 0 | х | 3 |
| *Е* | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | х |

**5. Әрбір команда бір-бірімен бір рет қана ойнаған футбол жарысында А, В, С, Д және Е командалары қатысты. Жеңіс үшін командаға 3 ұпай, тең ойында 1 ұпай, ал жеңілген жағдайда 0 ұпай беріледі. Нәтижесінде А, Б, В, Г, Д командалары 7 ұпай алды.Е командасы ең үлкен қанша ұпай жинау мүмкін еді.**

Жауабы. 7 ұпай. Шешуі. Бір команда жеңіске жеткен ойында ұтқан команда 3 ұпай алады, ал тең есеппен аяқталған ойында командалар 2 ұпайдан алады. 7 саны 3ке бөлінбейтің болғандықтан, 7 ұпай жинаған команда қандай да бір ойында қарсыласпен тең ойнады. Мұндай командалар саны 5-еу болғандықтан, бұл турнирда тең есеппен аяқталған ойындар саны кемінде 3-еу. Ал барлығы 15 ойын өткізілгенің тексеру оңай. Сондықтан барлық командалардың ұпай сандарының қосындысы 2×3+3×12 = 42-ден көп емес. Оның ішінде 35 ұпайды А, Б, В, Г және Д командалары жинады. Сондықтан ең көп ұпайды Е командасы жинады: 42-35=7 ұпай. Ол қалай дәл 7 ұпай алатыны оң жағымыздағы кетеде көрсетілген.

