III ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР атындағы математикалық олимпиадасының

2 (аймақтық) кезеңі.

25 қаңтар 2011 ж.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Бірінші күн.*

*1. Тақтада үш төртбұрыш салынған. Петя: «Тақтада кем дегенде екі трапеция салынған» деді. Вася : «Тақтада кем дегенде екі тіктөртбұрыш салынған» деді. Коля: «Тақтада кем дегенде екі ромб салынған» деді. Екі баланың рас айтқаны және бір баланың өтірік айтқаны белгілі. Салынған төртбұрыштар ішінде квадрат бар екенін дәлелдеңіз.(Трапеция — екі қабырғасы параллель және қалған қабырғалары параллель емес төртбұрыш.)*

Шешуі. Трапеция параллелограмм бола алмайды. Сондықтан, егер Петя дұрыс болса, онда тақтада бірден артық емес параллелограмм салынған, және Коля мен Вася дұрыс емес. Бірақ, есептін шарты бойынша бірақ адам өтірік айтты. Олай болса өтірік айтқан Петя, ал Вася мен Коля шындықты айтты. Бірақ, бұл дегеніміз тақтада салынған үш төртбұрыштың біреуі бір уақытта тіктөртбұрыш және ромб болады, яғни ол квадрат.

Критерии. Айқын түрде мындай тұжырым айтылды:

"екі дұрыс тұжырымнан фигураларды қарастырайық. Онда бір фигура екеуінің де қасиетіне ие болады", ары қарай дұрыс тұжырым айтылмаған*1 балл*.

Егер "Петя өтірік айтты" және "Квадрат бір уақытта ромб және тіктөртбұрыш" , деген кезде қарамақайшылық туындамаса*2 балл*.

Петя өтірік айтатыны дәлелденсе*4 балл*.

"Ең аз екі" сөз тіркесі "дәл екі" делінсе, және бұдан әлдеқайда оңай есеп шығарылса*балл алып тасталынбайды*.

"Егер Петя дұрыс емес, және фигуралардын біреуі тіктөтбұрыш пен ромб" және толық түсіндірусіз неге басқа ондай табылатының дәл солай айтса *балл алып тасталынбайды*.

*2. Арасында кез келген санды алып, оған қалған екеуінің квадраттарының қосындысын қоссақ, онда таңдалған санға тәуелсіз бірдей нәтиже шығатындай үш оң сан берілген. Бастапқы сандардың ішінде екі сан бірдей екенін дәлелдеңіз.*

Бірінші шешімі. Біздің сандарды a, b, c деп белгілейік. Онда, *a*+*b*2+*c*2 = *a*2+*b*+*c*2 = *a*2+*b*2+*c*. Ең бірінші екі теңдіктен *a*2−*a* = *b*2−*b* екенін аламыз, ол мына теңдікпен бірдей (*a*−*b*)(*a*+*b*−1) = 0. Олай болса , *a* = *b* немесе *b* = 1−*a*. Дәл солай , *a* = *c* немесе *c* = 1−*a*. Онла, егер *a* ≠ *b* және *a* ≠ *c*, онда *b* = 1−*a* = *c*, яғни кезкелген жағдайда екі сан тең.

Екінші шешімі. Біздің сандарды a, b, c деп белгілейік. Онда *a*+*b*2+*c*2 = *a*2+*b*+*c*2 = *a*2+*b*2+*c*. Бұл жерден  
*a*2−*a* = *b*2−*b* = *с*2−*с* = *d* (мұндағы *d* – қандай да бір сан), яғни *a*, *b* және *c* сандары *x*2−*x* = *d* теңдеуінің шешімдері. Бірақ квадраттық теңдеудің екіден көп шешімі болмайды. Бұл дегеніміз , кем дегенде екі сан өзара тең.

Критерии. Егер жұмыста кезкелген мұндай мысалда барлық сандар міндетті түрде тең болуы керек деп айтылса, онда шешім *3 баллдан жоғары бағаланбайды.*

(a-b)(a+b) = a–b түріндегі теңдеуді ешбір күмәнсіз "қысқартып", a+b=1 теңдігін аламыз (шешуіндегі қалган шығарылу жолдары дұрыс; оның ішінде ешқандай сылтаусыз барлық сандар тең деп айтылмайды) — *5 балл*.

{a=b или a+b=1} түріндегі жүйе пайда болды, бұдан кейін бірден "олай болса, немесе барлығы тең, немесе екеуі тең (a=b), ал үшіншісі = 1-a" деп ешқандай түсіндірусіз айтылса — *5 балл*.

{a=b или a+b=1} түріндегі жүйе пайда болды, ары қарай ешқандай жылжу болмаса — *3 балл*.

(a-b)(a+b)=a-b теңдігі алынса немесе (a-b)(a+b-1)=0 теңдігі алынса және ары қарай ешқандай керекті тұжырымдар болмаса —*1 балл*.

a(1-a)=b(1-b) (=c(1-c)) теңдігі алынса және ары қарай ешқандай керекті тұжырымдар болмаса — *0 балл.*

3. *AD = АВ+CD болатындай ABCD дөңес төртбұрышы берілген. А бұрышының биссектрисасы ВС қабырғасының ортасынан өтетіні белгілі. D бұрышының биссектрисасы да ВС қабырғасының ортасынан өтетінін дәлелдеңіз.*

Шешуі. *E* — *BC-*ның ортасы болсын. *AB = AF* болатыңдай, *AD* қабырғасынан *F* нүктесін алайық; онда *FD = AD*−*AF = CD* шартынан. *AEB* және *AEF* үшбұрыштары екі қабырғасы (*AB = AF*, *AE* — общая) және олардың арасындағы бұрыш бойынша тең. Значит, *EF = BE = EC*. Енді, *DEF* және *DEC* үшбұрыштары үш қабырға бойынша тең екенін аламыз , бұл жерден ∠*EDF =*∠*EDC*, және *E* нүктесі *D* бұрышының биссектрисасында жатады, дәлелдеу керегі де осы еді.

Ескерту. *AB* || *CD* екенін көрсету оңай. Шыңында да, ∠*ABE =*∠*AFE =*180°∠*DFE =*∠*DCE*, яғни біржақты ішкі бұрыштарының қосындысы 180°.

Критерии. ADда, AF=AB (и DF=DC) болатыңдай F нүктесі белгіленген, және ещқандай керекті тұжырымдар болмаса — *0 балл*.

F нүктесі белгіленген , және EB=EF=EC екені көрсетілсе, мұндағы E – BC –ның ортасы *4 балла*.

AB||CD екенінің айтылмаса немесе дәлелдеуі болмаса , *бағалау өзгертілмейді*.

*4. 8x8 шахмат тақтасы шаршыларының центрлері арқылы өзін өзі қимайтындай тұйықталған сызық жүргізілген. Әрбір буын көршілес горизонталь, вертикаль не диоганаль шаршылардың центрлерін қосады. Сызық қоршаған бөліктегі қара бөліктің ауданы ақ бөліктің ауданына тең болатынын дәлелдеңіз.*

Бірінші шешімі. Шаршылардың ортасы арқылы үзік сызықтармен вертикаль және горизонталь сызықтар жүргізейік. Пайда болған үзік торлар шаршы құрайды. Біздің сынық буындар ол шаршының төбелерін вертикаль, горизанталь немесе диогональ бойымен қосады. Сондықтан, үзік сызықтар, облысқа бөлінген шектелен сызықтарды, диогональ бойынша кесіп алынған бірлік квадраттарға және жарты квадраттарға бөледі. Әрбір осындай квадратта және әрбір осындай үшбұрышта ақ және қара бөліктерінің аудандары тең екенін байқау ғана қалды. Шынымен де, әрбір квадратта екі түстін төрттен екі шаршысы болады, ал үшбұрыштың бір түстін төрттен бір бөлігі және әрқайсысы басқа түстін сегізден бір шаршы бөлігін келтіретін екі үшбұрышы бар болады.

Екінші шешімі. Тақтайдың шаршыларының ортасы арқылы өтетін, вертикаль және горизонталь түзулері арқылы пайда болған квадраттық торды қарастырайық. Бұл тордың әрбір квадраты диогональ бойынша төрт үшбұрышқа бөлейік. Әрбір пайда болған үшбұрыш жартылай ақ, жартылай қара екені анық. Екінші жағынан сынған сызықпен шектелген фигура осындай үшбұрыштардан тұрады, себебі есептін берілгені бойынша бұл фигура ол үшбұрыштарды қиып өтпейді.

Критерии. Ешқандай жалпы идеясыз қарастырылған сынған қисықтар үшін— *0 балл*; Үшбұрыш пен кішкентай квадраттарда ақ түстер саны мен қара түстер саны бірдей деген идея үшін — *1 балл*; фигураны осындай үшбұрыштар мен квадраттарға бөлуге болады деген дәлелденбеген тұжырым үшін *—* *3 балл*; Осының түсіндірілуі бар болса, онда осы үштікке тағы *1-ден 4-ке дейін балл қосылады*; бастапқы кішкентай квадраттардың орталарындағы квадраттық тордын төбелеріне нұсқау, толық түсіндірілу болып табылады.

III ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР атындағы математикалық олимпиадасының

2 (аймақтық) кезеңі.

26 қаңтар 2011 ж.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Екінші күн.*

*5. Бизнесмен Борис Михайлович, тракторист Васямен жарысқысы келді. Оның желаяқ «Лексусы» Васяның тракторынан он есе жылдам болғандықтан ол Васяға бір сағат ерте кетуге мүмкіндік берді. Васяның тракторы жоспарланған жолдың жартысын жүрген кезде тракторының рессоры құлап қалды, және соның есесіне, оның жылдамдығы бірінші жарты жолға қарағанда екі есе баяулады. Васяның рессорымен кездесу нәтижесінде Борис Михайлович көршілес қызметке 4 сағатқа тоқтады, содан кейін ол жолды алдындағыға қарағанда екі есе баяу жүрді. Нәтижесінде ол Васядан кем дегенде бір сағатқа қалып қойғанын дәлелдеңіз.*

Бірінші шешімі. Борис Васиняның рессорымен кездескендіктен, ол Васяны жарты жолда әлі қуып жетпеген болатың. Қалыпты жағдайда ол Васяны 10/9 сағатта қуып жетіп алатыны түсінікті; олай болса, Вася жолдың жартысын 10/9-a сағатта жүріп өтеді, мұндағы *a* ≥ 0. Онда барлық жолды ол 10/3−3*a* сағатта жүріп өтеді. Ал Борис жолдың жартысын 1/9−*a*/10 сағатта жүріп өтеді, ал екінші жартысын екі есе ақырын жүріп өтеді, онда барлық жолға ол4+1/3−3*a*/10 ≥ 1+(10/3−3a) уақыт жұмсайды, дәлелдеу керегі де осы еді.

Екінші шешімі. Шарт бойынша Васяға, Борис оны жолдың бірінші жартысында қуып жетпесі үшін бір сағат фора жеткілікті.Олай болса жолдың екінші жартысына(мұнда оның жылдамдығы екі есе кеміді) Васяға 2 сағат фора жеткілікті. Ал оның болса ең кем дегенде 4 сағат форасы бар(ол уақытты Борис сервисте өткізді). Олай болса Борис жарысты Васяға қарағанда ең аз дегенде 2 сағатқа ерте аяқтайды.

Критерии. Келтірілген есептерді шешуі кезінде Борис Михайлович барлық жолға кем дегенде Васяға қарағанда 1сағат көп жұмсады( яғни фораның есебінен Васяға қарағанда кем дегенде 2 cағат көп жұмсады). Автор дәл осындай тұжырым туралы айтқан болатын. Бірақ, оның берілгені екі түрлі мағынаға ие болып қалды, және көптеген қатысушылар , БМ Васяға қарағанда кем дегенде бір сағат кеш жеткенін дәлелдеген болатын. Қатысушылардың кінәсі жоқ болғандықтан, есептің екі мағынасын да дұрыс деп ойлап, соларға сәйкес бағаладық.

«Ең жаман жағдайды» қарастырған кезде, яғни рессор лексустың бамперының астына түскен кездегі жағдай неге «жаман» екені түсіндірілусіз(яғни ол үшін есептін берілгені дұрыс болса, ол барлық жағдай үшін дұрыс)*3 баллдан кем емес.*

Үш шарттын ішінен тек қана (3)-ші шарт қана алынған: (1) Васяның уақыты үшін өрнек; (2) Бористың уақыты үшін өрнек және (3) рессордың уақыты үшін өрнек(Борис жолдың жартысын Васядан кеш өтеді).*1 балл*; барлық үш шарт алынса, және басқа тұжырым болмаса*2 балл.* (1) –ші және (2)-ші шарт (3)-ші шартсыз *бағаланбайды.*

Қатаң теңсіздіктерді қатаң емес теңсіздіктермен қарастырғаны үшін *балл алып тасталынбайды*.

*6. Тақтада 1 саны жазылған. Егер тақтада а саны жазылса, онда оны a+d түріндегі кез келген санмен алмастыруға болады, мұндағы d саны а санымен өзара жай және 10 ≤ d ≤ 20. Тақтада осындай бірнеше операция қолданып 18! = 1⋅2⋅3⋅...⋅18 санын алуға болады ма?*

Бірінші шешімі. 18!–19 саны 1-ге аяқталатының байқайық. Тақтада тұрған санға 10 санын қосып отырайық. Әр кезде 1ге аяқталатын сан пайда болып отырады, олай болса 10 санымен өзара жай сан пайда болып отырады, сол үшін операция мүмкін. Ең соныңда тақтада 18!–19 саны жазылады. Оған біз 19 санын қосып, 18! санын аламыз.

Екінші шешімі. 18! саны 19ға бөлінбейтіні түсінікті. Онда 18!-19k саны да 19ға кезкелген натурал k саны үшін бөлінбейді. Енді біз 19ға бөлгендегі қалдығы 0 бермейтін сандарды табуды үйренсек, 19ды біреуіне қоса отырып, біз 18! санын ала аламыз (19 қатар санды ала алу да жеткілікті болатын еді) . Осыны істеп үйренейік. 11ден 21ге дейінгі сандар бір операциямен алынады. 22+n түріндегі сандар, 0 < n < 10 аралығында 1+10+(11+n) түрінде алынады. 22 санын ала алмаймыз, оның есесіне дәл сол қалдықтағы 41алына алады,мысалы 41 = 1+10+16+14.

Үшінші шешімі. Вильсон теоремасы бойынша 18! ≡ 18 (mod 19). Сондықтан бірінші адымда 18 = 1 + 17 санын алу жеткілікті, ал ары қарай 19 санын қосып отырамыз.

Төртінші шешімі. 18! – 19 ≡ 17 (mod 18). Сондықтан бірінші адымда 17 = 1+16 санын алу жеткілікті және ал ары қарай 18 санын, 18! – 19 саны шықпағанша қосып отырамыз. Енді 19 санын қоссақ болады.

Критерии. 18! санын тек қана 18!-19 санынан алуға болатынын дәлелденсе , және басқа ешқандай тұжырым болмаса — *1 балл*.

Ешқандай дәлелдеусіз, толық, дұрыс алгоритм — *4 балл*. Есеп 18! санын 19 санына бөлудегі қалдықты іздеуге бағытталса, бірақ қалдық дұрыс табылмаса — *1 баллдан көп емес* .

Бірінші шешудегі алгоритмді дәлелдеу үшін келесі тұжырымдарды дәлелдеу керек(немесе оған эквивалентті тұжырымдарды): (1) 10-шы саннан бастап барлық аралықтағы сандар өзара жай; (2) соңғы сан 19 санымен өзара жай; (3) 18! саны 0ге аяқталады (бұл тұжырымға дер кезінде қарау керек). (1) және (2)нің әрқайсысының дәлелдеуі жоқ болса және (3)ге нұсқау болмаса  *1 баллдан алынып тасталынады*.

Екіншінің шешуі кезінде. 18!-19k бен 19 өзара жай екенінің дәлелденбеуі — *1 балл алынып тасталынады*. Есеп 19ға бөлгендегі қалдығы 0 бермейтін сандарды табуға бағытталса(дәлелденуімен), үштен көп қалдық алынбаса немесе дұрыс табылмаса— *4 балл*. Дәл солай, үштен көп қалдық алынбаса немесе дұрыс табылмаса — *3 балл*.

*7. Төрт әртүрлі бүтін сан үшін олардың өзара қосындысы мен өзара көбейтінділерін тапты. Алынған қосындылар мен көбейтінділерді тақтаға жазды. Тақтада кемінде қанша әртүрлі сан болу мүмкін?*

Жауабы. 6. Шешуі. Егер –1, 0, 1, 2 сандарын алсақ, онда тақтада жазылған әрбір сандар мыналар : −2, −1, 0, 1, 2 немесе 3 — бардығы 6 әртүрлі сан. Алты саннан аз сан тақтада болмайтынын көрсетейік. *a < b < c < d* сандарыалынсын. Онда *a*+*b < a*+*c < a*+*d < b*+*d < c*+*d* теңсіздіктері орындалады, бұл бес әртүрлі сан береді.

Тақтада бұл бес саннан өзгеше сан барын дәлелдеу ғана қалды. Біз тақтада, *c*+*d*дан үлкен, немесе, *a*+*b*дан кіші сан барын дәлелдейміз. Егер *a*≥0, онда *b*≥1, *c*≥2, *d*≥3, сондықтан *cd*≥2*d > c*+*d*. Егер *a <*0, а *d*≥2, онда *ad* ≤ 2*a < a*+*b*. Қалған жағдайларда *a <*0 и *d* ≤ 1. Бірақ ол кезде *c* ≤ 0, *b* ≤ –1, *a* ≤ –2, бұл жерден *ab ≥*2>*c*+*d*. Шешімнің аяқталуының нұсқасы. *u* және *v* – модульі жағынан ең үлкен сандар болсын, және |*u*| ≤ |*v*|. Егер |*u*| ≥ 2, онда |*uv*| ≥ 2|*v*|, ал бұл кезкелген қосындыдан үлкен.Ал егер |*u*| ≤ 1, онда бастапқы сандардың арасында 1, 0, 1сандары болу керек еді . *v* > 0 болғанда тақтада кем дегенде 6 әртүрлі сандар жазылу керек: –1, 0, 1, *v*, –*v*, *v* + 1. *v* < 0 болған жағдай дәл осылай қарастырылады .

Критерии. Жауап қана болса — *0 балл*.

6 санға дұрыс мысал — *2 балл*.

Мәндер саны 5тен аз екені дәлелденсе , және басқа тұжырымдар болмаса — *1 балл*.

Әртүрлі сандар саны 6дан кіші екені дәлелденсе , бірақ мысал жоқ болса — *3 балл*.

6 санға дұрыс мысал және, мәндер саны 5тен кіші екені дәлелденсе, және басқа тұжырымдар болмаса — *3 балл*.

Дәл сол және оған қоса дәлелденсе , бірақ алтыншы мәннің бар болуының толық дәлелдеуі болмаса — *4 балл*.

*8. АВС үшбұрышында М және N нүктелері сәйкесінше АС мен АВ ның орталары. ВМ медианасынан, СN де жатпайтын Р нүктесі алынған. PC = 2PN екені белгілі. АР = ВС екенін дәлелдеңіз.*

Бірінші шешімі. *AKBP* — параллелограмм болатыңдай *K* нүктесін белгілейік. Онда оның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді , яғни *N* нүктесінде қиылысады және *PK* = 2*PN* = *PC*. *MB* және *CK* түзулері *T* нүктесінде қиылыссын. *MT* || *AK* болғандықтан және *M* нүктесі — *AC*ның ортасы болғандықтан, *MT* — *AKC* үшбұрышының орта сызығы, бұл жерден *KT* = *TC*. Олай болса, *PT* — теңбүйірлі *KPC* үшбұрышының табанына жүргізілген медианасы, бұл жерден *PT* ⊥ *CK*. Онда *BT* — *BKC* үшбұрышының медианасы мен биіктігі, олай болса , *BC* = *BK*. *AKBP* —параллелограмм болғандықтан *BK* = *AP*, бұл жерден *AP* = *BK* = *BC*.



Екінші шешімі. *G* нүктесі арқылы *ABC* үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесін белгілейік. Онда *CG*/*GN* = 2 = *CP*/*PN*, яғни *G* нүктесі *PNC* үшбұрышының *NC* қабырғасын көршілес қабырғалардың қатынасындай қатынаста бөлетін еді. Биссектрисаның қасиеті бойынша ∠*CPG* = ∠*GPN* екенін аламыз. Олай болса, ∠*BPN* = ∠*BPC*. *X* — *PC*ның ортасы болсын. Онда *PX* = *PN*, сондықтан Δ*NPM* = Δ*XPM* екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрыштары бойынша тең. Бұл жерден *NM* = *XM*. Олай болса, *XM* және *NM* түзулері *APC* және *ABC* үшбұрыштарының орта сызығы болып келеді , олай болса, *AP* = 2*XM* = 2*NM* = *BC*.

Үшінші шешімі. *P* — *AQ*дың ортасы болатыңдай, *Q* нүктесін қарастырайық. Онда *BP*||*QC*, *BQ* = 2*NP* = *PC*, яғни *BQCP* – теңбүйірлі трапеция (*BQ* || *NP* ⇒ *PC* параллель емес ). Оның *BC* және *PQ* диогональдары өзара тең, ал *PQ* = *AP*.

Критерии. Тек қосымша салу: *N* нүктесі — *PK* ның ортасы болатындай *K* нүктесі — *1 балл*.

Тек *PC*ның ортасы тұрғызылған және *MN*= *MX* екенін дәлелдеу жеткілікті (анық дұрыс емес тұжырымдарсыз) — *1 балл*.

*BM* — *APC* бұрышының биссектрисасы екенін ешқандай алға жылжусыз тұжырымдау — *2 балл*.

Тек қана *BM* — *APC* бұрышының биссектрисасы екенін дәлелдеу — *2 балл*.

*P* нүктесінің *ВМ* түзуінің бір жерінде ғана орналасуын қарастырған жағдайда (медианалар қиылысуына дейін немесе кейін) — *баға кемітілмейді*.