**III Леонард Эйлер атындағы олимпиадасының**

**Дистанциондық кезеңінің бірінші туры**

**Бірінші тур 2010 жылғы ЖММ СПбГУ олимпиадасының мәліметтері бойынша жасалды. Осы олимпиадаға қатысқандарға қатысуға болмайды.**

**1.Екі бүтін оң санның әрқайсысы, олардың айырымына бөлінсе (қалдықсыз), ол екі санды өте жақын дейміз. Математика сабағында Воваға 210 санымен өте жақын сандарды жазып шығуға тапсырма берді. Оған қанша сан жазу қажет?**

Жауабы: 2.1. Шешуі. 210 саны екінің мына дәрежелеріне ғана бөлінеді: нен не дейін. Сондықтан, онымен көршілес 210–29, 210–28, …, 210–20, 210+20, …, 210+210 сандары ғана болуы мүмкін (0 = 210–210  саны жарамайды, себебі ол оң сан емес). Екіншіден бұл сандардың 210 санымен шыңымен көршілес екеніне көз жеткізу оңай.

Ескерту. Қатысушылардың көп бөлігі формулалардың дұрыс көрінбеуінен есептің берілгенінен «210» санының орнына «210» санын оқыған. «210» саны үшін де есеп дәл сол жолмен шығарылады, жауабы31.

**2. *Е* және *F* нүктелері – *АВСD* тіктөртбұрышының сәйкесінше *ВС* және *CD* қабырғаларының орталары. *АЕ* < 2*ЕF* екенін дәлелдеңіздер.**

Бірінші шешімі. 2*EF* = *BD* = *AC* > *AE*. Соңғы теңсіздік *AEC*бұрышының доғал болғандығынан шығады. Екінші шешімі. *BC* = 2*x*, *CD* = 2*y* болсын. Онда, *AE*2 = *x*2+4*y*2 < 4*x*2+4*y*2 = (2*EF*)2.

**3. (*a*+*b*+*c*)2 = –(*ab*+*ac*+*bc*) орындалатындай және *a+b*, *b+c*, *a+c* сандары 0 ге тең болмайтындай а, b, c бүтін сандары болсын. *a*+*b*, *a*+*c*, *b*+*с* сандары арасында кез-келген екеуінің көбейтіндісі үшіншісіне бөлінетінін дәлелдеңіз.**

Шешуі. (*a*+*b*)(*a*+*c*) = *a*2+*ab*+*ac*+*bc* = *a*2–(*a*+*b*+*c*)2 = –(*b+c*)(2*a*+*b+c*). Басқа екі жағдай әріптердің алмасуынан шығады.

**4. 101 карта қатарынан тізіліп қойылсын. Әрбір жұп орында жатқан картаға > не < белгісі салынсын. Белгілердің кез-келген орналасуында, қалған карталарға, шыққан теңсіздік орындалатындай 1, 2, ... 51 (әрқайсысын бір рет қана)сандарын жазып шығуға болатынын дәлелдеңіз.**

Бірінші шешімі . Алдымен тақ орында тұрған карталардың үстінен бір саннан жазып шығайық. Бірінші картаның үстіне 0 саның жазайық. Бұдан кейін оңға жылжып отырамыз және әрбір «>» белгісінен кейін алдыңғы болған саннан 1-ге кем санды жазып отырамыз, ал «<»белгісінен кейін алдыңғы болған саннан 1-ге артық санды жазып отырамыз. Мұнымен қоса, әрбір теңсіздік белгісінің бағыты үлкен саны бар картадан кіші саны бар картаға бағытталады. Енді ең кіші сандармен белгіленген карталарды алайық. Олардың саны  болсын. Оларға кезкелген ретпен 1,…, *k*1 сандарын жазып шығайық. Келесі белгіленетін карталар саны болсын. Ол карталарға ден ге дейін белгілейік және ден ге дейінгі сандар жазылмағанға дейін осы процессті жалғастыра берейік. Осы құрылымнан барлық теңсіздіктер дұрыс екені шығады.

Екінші шешімі. Бос карталарды ретімен солдан оңға қарай келесі алгоритммен толтырайық. Егер дәл сол бос картадан кейін < белгісі тұрса, онда оған қалған сандардың ішіндегі ең кіші санды жазамыз; басқа жағдайда қалған сандардың ішіндегі ең үлкен санды жазамыз. Мұндай толтыру кезінде барлық теңсіздіктер дұрыс болады. Шыныңда да, дәл осы адымда саны жазылса, ал бұған дейін саны жазылған болса, онда болған кезде теңсіздік дұрыс(cебебі алгоритм бойынша  саны оның оң жағында тұрған барлық сандардан кіші, олай болса дан да кіші), және болған жағдайда да теңсіздік дұрыс(себебі *а* саны өзінің оң жағындағы тұрған сандардың бәрінен үлкен, олай болса дан да үлкен).

**5. Алина шахмат тақтасына(8х8) 22 әртүрлі(бірақ бір-бірімен қиылыса алатын) үш шаршылы тіктөртбұрыш салып шықты, ал Полина – 22 өзара қиылыспайтын екі шаршылы тіктөртбұрыштарды салып шықты(бірақ олар Алинаның салған тіктөртбұрыштарымен қиылысу мүмкін). Кем дегенда екі салынған фигураны толығымен қамтитын 5 шаршыдан тұратын крест-тәрізді фигураны әрдайым қоюға болатынын дәлелдеңіз.(Крест-тәрізді фигура тақта сыртына шыға алады)**

Шешуі. Егер крест пен 1х3 тіктөртбұрышының орталық шаршылары сәйкес келсе, онда крест 1х3 тіктөртбұрышын толығымен қамтиды. Және егер кресттің орталық шаршысы тіктөртбұрышта жатса, онда крест 1х2 тіктөртбұрышын толығымен қамтиды. Ұзын және қысқа тіктөртбұрыштардың орталық шаршыларын белгілеп өтейік; барлығы 66 шаршы шығады, олай болса қайсібір шаршы екі рет белгіленген. Егер оны кресттін орталық шаршысы қылсақ, онда ол екі тіктөртбұрышты қамтиды.