**Леонард Эйлер атындағы III олимпиада, ақырғы кезең.**

**Бірінші күннің шешімі.**

1. Кез келген *n > 1* натурал саны үшін *a+b = c+d = ab–cd = 4n* болатындай *a, b, c, d* натурал сандары табылатынын дәлелдеңіз. (*С. Берлов*)

**Шешуі**. *a =*2*n*+*x*, *b =*2*n–x*, *c =*2*n*+*y*, *d =*2*n–y* деп алайық. Сонда теңдіктер *y*2*–x*2*=*4*n* түрінде жазылады. Енді *y*+*x =*2*n*, *y–x =*2 болсын. Сонда *x = n*–1, *y = n+*1 екенін аламыз. Осыдан *a =*3*n*–1, *b = n+*1, *c =*3*n+*1, *d = n*–1.

2. Дөңгелек үстелдің бойында 40 адам отыр. Кез келген арасында жұп сан адам отыратын екі адамның ортақ танысы болатындай, ал кез келген арасында тақ сан адам отыратын екі адамның ортақ танысы болмайтындай бола алады ма? (*А. Шаповалов*)

**Жауабы**. Бола алмайды. **Бірінші шешім**. Егер А мен В арасында *a* адам, В мен Б арасында *b* адам отырса, онда А мен Б арасында немесе *a+b*+1 адам, немесе |*a–b*|–1 адам отыр. Сондықтан да *a* мен *b* бірдей жұптықтан болса, одна А мен Б арасында тақ сан адам отыр. Кем дегенде үш танысы бар В адам бар болсын. Сонда оның таныстарының арасында жұптығы бірдей *a* и *b* болатын А және Б танысы бар болады. Және оларда ортақ В таныс бар және олардың арасында тақ адам отыр. Егер әр отырған адамда ең көп дегенде екі таныс болса, онда әрқайсысы үшін ортақ танысы бар ең көп екі адам табылады. Ал есеп шарты бойынша ондай 20 адам болу керек.

**Екінші шешім**. Қарсы жориық. Кез келген отырғанды алайық. Жұп санды адамнан кейін одан ары 20 адам отыр. Бірінші есептің шешімінде көрсетілгендей, ол адамдар бір-бірінен тақ санды адамнан кейін отыр. Сондықтан оларда ортақ таныс жоқ. Яғни олармен алғанда әр түрлі 20 ортақ таныс керек. Ол дегеніміз әр отырған адамда кемінде 20 танысы бар деген сөз. Ал олай болса, кез келген отырған екі адамда ортақ таныс бар деген сөз. Қарама-қайшылық.

3. Үш литрлік банка мен көлемі 100 мл болатын өлшеу берілген. Бірінші банка бос, екіншісінде — 700 мл тәтті шәй, ал үшіншісінде — 800 мл тәтті шәй. Сондай ақ, екіншісінде 50 г қант, ал үшіншісінде 60 г қант ертілген. Кез келген банкадан өлшеуді толық толтырып басқа өлшеуге барлық шәйді төгуге рұқсат етіледі. Бірінші банка бос, ал екінші банкадағы қанттың мөлшері үшінші банкадағы қанттың мөлшеріне тең болатындай бірнеше осындай құйыстардаң арқасында жасауға болады ма? (*В. Шевяков*)

**Жауабы**. Болмайды. **Шешуі**. Екінші банкада алғашқы концентрация 50/700 = 1/14-ге тең. Ал үшіншіде — 60/800 = 3/40. 3/40 > 1/14 болғандықтан кез келген құйылымнан кейін әр бос емес банкада қанттың концентрациясы 3/40-тен артық болмайды. Есеп шарты бойынша әрбір құйылымнан кейін банкадағы шәйдің саны 100 мл.-ге бөлінеді. Сондықтан, егер шәйдің барлығы екінші мен үшінші банкада болса, одна олардың қандай-да біреуінде 700 мл.-ден көп емес шәй бар. Сода қанттың жартысы болсын. Сонда оның концентрациясы 55/700= 11/140  –ден кем емес. Ал 11/140 > 3/40 болу керек, ол мүмкін емес. Қарама-қайшылық.

4. *AB = CD* тең болатын *ABCD* дөңес төртбұрышының ішінен *PBA* мен *PCD* бұрыштарының қосындысы 180 градусқа тең болатындай P нүктесі алынған. *PB+PC < AD* екенін дәлелдеңіз. (*С. Берлов*)

**Шешуі**. *PC* сәулесінен *CK = BP* болатындай *C-*дан әрі *K* нүктесін алайық. Сонда *ABP* мен *DCK* үшбұрыштары екі қабырға мен олардың арасындағы бұрыш бойынша тең болады. Сондықтан *DK = AP* және ∠*BAP =*∠*CDK*. *PKDL* параллелограммын салайық. ∠*ABC*+∠*BCD* > 180° болғандықтан ∠*BAD*+∠*ADC* < 180° болады. Осыдан *APD =*180°*–*∠*PAD–*∠*PDA* > ∠*BAP*+∠*PDC =*∠*PDK =*∠*DPL.* Яғни *PL* сәулесі *APD* бұрышының ішімен өтеді. *AP = DK = LP*, сондықтан да *D* нүктесі мен *L* нүктесі *AL*-дің орта перпендикулярының бір жағында жатады. Сонда *AD* > *DL = PK = PC*+*PB*.

**Леонард Эйлер атындағы III олимпиада, ақырғы кезең.**

**Екінші күннің шешімі.**

5. Қатарынан келетін 100 натурал сандарды цифрларының қосындысы өсуі бойынша, ал қосындысы тең болатын сандар үшін сол сандардың өсуі бойынша сорттады. 2010 мен 2011 сандары бірге келе алады ма?(С. Волчёнков) (*С. Волчёнков*)

**Жауабы**. Бола алмайды. **Шешуі**. 2010 мен 2011 бірге болып қалсын. Ол дегеніміз алынған 100 санның ішінде цифрларының қосындысы 3-ке бөлінетін сан 2010 саны. Ал цифрларының қосындысы 4-ке бөлінетіннен 2011 ең кішкентайы. Бірақ та ол дегеніміз, қатар келген 100 сандар ішінде 2010 де 2011 де бар, ал 2002 де 2100 де саны жоқ дегеніміз. Ал ол мүмкін емес.

6. *AB || CD, BC || AD, AC || DE, CE ⊥ BC* болатындай *ABCDE* дөңес бесбұрышы берілген. *EC — BED* бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелдеңіз. (П. Кожевников) (*П. Кожевников*)

**Шешуі**. *DE* кесіндісін *BC-*мен *K* нүктесінде қиылысқанға дейін созайық. Есеп шартынан *ABCD* мен *ADKC*— параллелограмм екені шығады, сондықтан *BC = AD = CK.* Сонымен *EC* — медиана және биіктік болады. Яғни ол *BEK* үшбұрышында биссектриса да болады.

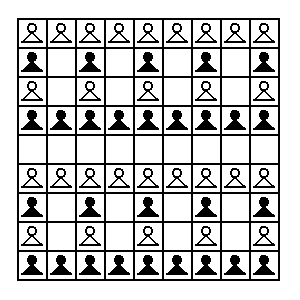
7. Шеңбер бойымен қысқартылмайтын бөлімі тақ және 1010 үлкен болатындай бес қызыл бөлшек жазды. Әрбір көршілес қызыл бөлшек арасына қысқартылмайтын екеуінінің көк қосындысын жазды. Барлық көк бөлшектердің бөлімдері 100 ден кіші болуы мүмкін бе? (*И. Богданов*)

**Жауабы**. Бола алмайды. **Шешуі**. Болады деп жориық. *a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5 — шеңбер бойымен бір ретпен орналасқан алғашқы бөлшектер және *a*1 санының бөлімі 1010-нен үлкен болсын. 2*a*1 = (*a*1+*a*2)+(*a*3+*a*4)+(*a*5+*a*1)–(*a*2+*a*3)–(*a*4+*a*5) екенін байқайық. Есеп шыртынан, осы теңдіктің оң бөлігі бөлімі 100-ден кіші бес бөлшектің қосындысы десе болады. Қосындының қысқартылмайтын түрге келген түрінің бөлімі қосылғыштардың бөлімдерінің көбейтіндісінен аспайды. Яғни, бір жағынан қысқартылмайтын 2*a*1 санының бөлімі 1005 = 1010-нен үлкен емес. Екінші жағынан *a*1 санының бөлімі тақ болғандықтан оның бөлімі 2*a*1 санының бөліміне тең, яғни ол да 1010-нен үкен емес. Қарама-қайшылық.

8. 9х9 тор көзді тақтаға ең көп дегенде бір бірін жемейтіндей(сондай ақ, өзінің түсімен бірдей пешканы) қанша қара және ақ пешка қоюға (пешка, өзінің түсіне тәуелсіз кез келген шаршыға қоюға болады) болады? Ақ пешка нөмері үлкен көршіес екі диоганальді жейді, ал қара пешка нөмері төмен екі көршілес диоганальді жейді (сур. қараңыз). (А. Антропов



(*А. Антропов*)

**Жауабы**. 56. **Шешуі**. 56 пешкамен мысал суретте көрсетілген. Әр үш қатар мен екі бағаннан құралған тіктөртбұрышта пешка саны 4-тен аспайтынын байқайық. Шынымен, егер әр сондай тіктөртбұрышта кем дегенде 5 пешка бар болса, онда бір түстің біреуінде баршық шаршы бос болмайды және отраңғы қатардағы пешка қалған екі пешканын біреуін ұрады. Яғни, 9 қатардан және 8 бағаннан құралған тіктөртбұрышта ең көп дегенде 48 пешка бар. Біз 57 пешка қоя алдық деп жориық. Сонда 9-шы бағанда кем дегенде 9 пешка, яғни дәл 9 пешка тұру керек. Сонда сегізінші бағанда 2-ден көп емес пешка түр. Өйткені, егер 2-ден көп болса бағанның ең астында да емес, ең үстінде де емес бір пешка табылушы еді, ал ол 9-шы бағандағы қандай да бір пешканы ұрушы еді. Сонда 8-ші және 9-шы бағандарда бірге 11-ден артық емес пешка тұрушы еді, ал 2-7 бағандарда ең көп дегенде 36 пешка болады. Ол дегеніміз 1-ші бағанда 10 пешка бар болу керек деген сөз. Қарама-қайшылық.