**Леонард Эйлер атындағы олимпиадасының дистанциондық кезеңінің төртінші туры**

**1. Сидоров тұрғынында бір тонна круглик пен тонна шмуглик алуға жететіндей ақшасы бар. Егер де ол кругликтерді 20% ға көп алса, оған шмуглик алуға 40% жеңілдік жасайды және оған қалған ақша шмуглик алуға жетеді. Ал егер ол шмугліктерді 40% ға көп алса, онда оған кругликтерге 20% жеңілдік жасайды және қалған ақша кругликтер алуға қайтадан жетеді. Тонна круглик қымбат па, әлде тонна шмуглик қымбат па? Қанша есеге?(Екі жағдайда да, барлық ақша жаратылады)**

Жауабы. Кругликтер тоннасының бағасы шмугликтер тоннасының бағасына қарағанда 2 есе қымбат тұрады. Шешуі. 1 тонна кругликтер бағасы *x* ақша тұрсын, 1 тонна шмугликтер бағасы *y* ақша тұрсын. Онда Сидоров азаматында (*x+y*) ақша бар. Егер ол 20% кругликтерді көбірек сатып алса, ал щмугликтер тоннасын 40% жеңілдікпен алса, ол (1,2*x*+0,6*y*) ақша жұмсайтын еді, және ол (*x+y*)-тен көп емес. Ал егер де ол 40% щмугликтерді көбірек сатып алса, ал кругликтердің тоннасын 20% жеңілдікпен алса, ол (1,4*x*+0,8*y*) ақша жұмсайтын еді, және ол (*x+y*)-тен көп емес. Осыдан екі теңсіздік аламыз : . Бірінші теңсіздіктен 0,2*x* ≤ 0,4*y* екені шығады, яғни *x* ≤ 2*y*. Ал екінші теңсіздіктен 0,4*y*≤0,2*x* екені шығады, яғни 2*y*≤ *x*. Екі теңсіздікті салыстыра отырып *x* = 2*y* теңдігін аламыз.

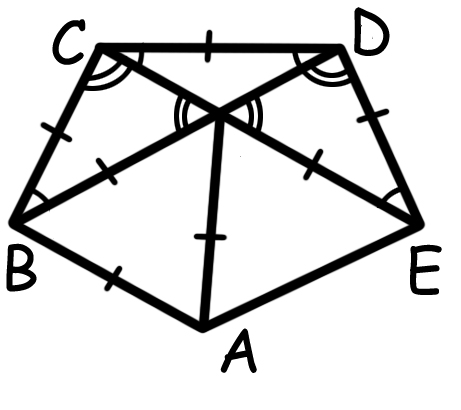
**2. Бұрышы 30 болатын тік бұрышты үшбұрышты кем дегенде бір медианасы екіншісінің кем дегенде бір биссектриссасына параллель болатындай екі үшбұрышқа бөліңіз.**

Шешуі. *ABC* үшбұрышында *А* бұрышы 30°-қа тең, ал *B* — 60°-қа тең болсын. Бірінщі әдіс. Тік бұрыштан *CD* биіктігін гипотенузаға түсірейік. *B* бұрышының биссектрисасы, *D* нүктесінен *AC* қабырғасына жүргізілген медианаға параллель. Екінщі әдіс. *BE* биссектрисасын жүргізейік. *EAB* үшбұрышындағы *Е* нүктесінен жүргізілген биссектриса(ол медиана және биіктік), үшбұрыш *CBE*-дағы *С* нүктесінен жүргізілген медианаға параллель. *Параллель екендігі екі жағдайда да бұрыштарды есептек арқылы оңай дәлелденеді.* Үшінщі әдіс. *BE* биссектрисасын жүргізейік. ∠*EBA*= ∠*A*= 30° болғандықтан, *EA*= *EB*> *EC*. Сондықтан, *AC* түзуінің ортасы – *M* нүктесі *AE* қабырғасында жатады, және *M* нүктесі арқылы жүргізілген *BE* параллель түзу *AB*-ны қандай да бір *D* қияды. *ABC* үшбұрышын *CBD* және *CAD* үшбұрыштарына бөліп тастайық. Онда *CBD*-дағы *B* бұрышының биссектрисасы *BL* түзуінде жатады, және сондықтан үшбұрыш *CAD*-ның *DM-*медианасына параллель.

**3. *a*, *b*, *c* натурал сандары ЕУОБ(*ab*, *c*) = ЕУОБ(*a*, *bc*) ботатындай алынған. *a*/*c* бөлшегін қысқартқаннан кейін алымы мен бөлімі *b* саныман өзара жай болатын қысқармайтын бөлшек шығатынын дәлелдеңіз.**

Шешуі. *b* санының жай көбейткіштеріне кіретін, кезкелген *p* жай саны, *a* және *b* сандарының көбейткіштеріне бірдей дәрежеде кіретінің дәлелдеу бізге жеткілікті*.*Осыны дәлелдейік. Шынымен де, мысалы, *p* саны *a* санының жіктелуінде, *c* санының жіктелуінде қарағанда көбірек кездеседі. Олай болса ЕҮОБ(*ab,c*) санының жіктелуінде *p* саны қандай дәрежемен кірсе, *с* санының жіктелуінде сондай дәрежемен кіреді. Ал ЕҮОБ(*a,bc*) санының жіктелуіне үлкен көрсеткішпен кіреді, себебі *a* және *cb* сандарында *p* санының көбейткіштері*, c* санындағы *p* санының көбейткіштеріне қарағанда көбірек. Дәл осылай екінші жағдайды қарастырамыз.

**4. *ABCDE* бесбұрышында *АВ = BC = CD = DE*, ∠*В* = 96 және ∠*C* = ∠*D* = 108. *Е* бұрышын табыңыз.**



Жауабы. 102°. Шешуі. *BD* және *CE*  кесінділерін жүргізейік. Олар *O* нүктесінде қиылыссын. *BCD* және *CDE* үшбұрыштары тең бүйірлі және төбесіндегі бұрыштары қа тең, олай болса табан жағындағы бұрыштары қа тең (олар суретте бір доғамен белгіленген) . Онда, ∠*BCE* = ∠*BDE* = 72°. *COD* бұрышы 108°-қа тең(*COD* үшбұрышында екі бұрыш 36°-тан болғандықтан). Сондықтан, ∠*COB* = 180°−108° = 72°. Суретте 72°-қа тең бұрыштар екі доғамен белгіленген. *CBO* және *DEO* үшбұрыштары теңбүйірлі екенін аламыз. Олай болса, *AB* = *BO* =*BC* = *CD* = *DE* = *EO* = *х*. ∠*OBA* = 96°−36° = 60° екенін байқап өтейік. Олай болса төбесіндегі 60° бұрышымен үшбұрыш *OBA* теңбүйірлі, яғни теңқабырғалы. Сондықтан, *AO* = *x*. ∠*AOE* = ∠*EOB*−∠*AOB* = 108°−60° = 48°. Төбесіндегі 48° бұрышымен үшбұрыш *AOE* теңбүйірлі. Сондықтан, ∠*OEA* = (180°−48°)/2 = 66°. Осыдан, бесбұрыштың *E* бұрышын табамыз: ∠*AED* = ∠*AEO*+∠*OED* = 66°+36° = 102.

**5. Петя 3×3 таблицасына 1,2,…,9 сандары жазылған карточкаларды қойып шығады. Ол теріс қарағаннан кейін, Витя, қабырғалары ортақ екі көршілес картаны орнымен ауыстырады да, барлық карталарды теріс қаратады. Содан кейін Петя бір рет бір немесе бірнеше картаға көрсетеді, ал Витя оған сол карталардың сандарының қосындысын айтады. Петя карталардың орналасуын кез келген жағдайда білетіндей стратегиясы бар ма?**

Жауабы. Стратегиясы бар. Шешуі. Петя карточкаларды суреттегідей қояды. Содан кейін Вася карточкалардың орындарын ауыстырып, олардың бетін астыға қаратады, ал Петя болса суретте сұр түспен белгіленген 4 карточканы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | 1 | 2 |
| 3 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 4 |

Васяға көрсетеді(Оларға алғашында Петя 1,3,7,9-ды салған болатың). Алғашында ол жердегі қосынды 20-ға тең болатын. Енді Вася Петяға қазіргі қосынды қанша екенін айтты. Кез-келген көршілес әр-түрлі карточка жұптары үшін, сұр карточкадағы санның айырмасы және ақ карточкадағы санның айырмасы әр-түрлі екенін көру оңай. Бұл бір карточкадан қайталанатың жұптарға да қатысты. Олай болса, аталған қосынды бойынша, қандай карточкалар орын алмасқаны оңай анықталады.