**1.** Барлық жай сандарды өсу ретімен нөмерлейік: *p*1 = 2, *p*2 = 3, … . Мына арифметикалық орта (*p*1+…+*pn*)/*n*, қандай да бір  *n* ≥ 2 мәніңде жай сан бола ала ма? (*С. Волчёнков*)

**Жауабы**: Жоқ. **Шешуі**. (*p*1+…+*pn*)/*n* = *q* болсын ⇔ *p*1+…+*pn* = *nq* (\*), мұндағы *q* —жай сан. Егер *n* > 1, онда *q* > 2 болатыны анық. Сондықтан, *n* жұп болған кезде,(\*) теңдігінің сол жағы тақ, ал оң жағы жұп, ал *n*-нің тақ мәніңде — керісінше. Олай болса, мұндай теңдік мүмкін емес. **Ескерту.** Біз бұдан да мықты тұжырымды дәлелдедік: арифметикалық орта ешқандай тақ сан болуы мүмкін емес.

**2.** Швамбаранияда кейбір қалалар екіжақты қонбайтың авиарейстермен байланысқан. Рейстер үш авиакомпания арасында бөлінген, мұнымен қатар, егер қандай да бір авиакомпания А және Б қалаларына қызмет көрсетсе, онда басқа компанияның ұшақтары бұл екі қаланың арасында ұшпайды. Әр қаладан үш компанияның да ұшақтары ұшатыны белгілі. Бір қаладан ұшып шығып, жол-жөнекей барлық үш компанияның рейстерін пайдаланып, және ешқандай екі қаланың ортасында екі рет болмай, қайтадан сол қалаға қайтып келуге болатының дәлелдеңіз. (*С. Берлов*)

**Шешуі**. Кез-келген А қаласынан бірінші компаниямен ұшып шығайық, Б қаласына түсеміз, ол жерден екінші компаниямен ұшып шығайық, ары қарай үшіншімен, содан кейін қайтадан біріншімен, екіншімен, үшіншімен және дәл солай жалғастыра берейік. Жолда В қаласы кездескен ең бірінші сәтті қарастырайық, және біз ол жерде болғанбыз. Онда В қаласына барған бірінші жол мен екінші жолдың арасындағы бөлігі ізделіңді жол болады. Шыңында да егер бірінші ретте В қаласынан Г қаласына ұшқан болсақ, онда Г қаласынан В қаласына бірден жете алмайтың едік. Сондықтан, В қаласына екі сапармен біз ең кем дегенде үш рет ұштық, бұл дегеніміз жөл-жөнекей үш компанияның рейстерін пайдаландық деген сөз.

**3.** *ABCD* төртбұрышында *AB* қабырғасы *AC* диогональна тең және *AD* қабырғасына перпендикуляр, ал *AC* диогональі *CD* қабырғасына перпендикуляр. *AC* = *AK* болатыңдай *AD* қабырғасынан *K* нүктесі алынған. *ADC* бұрышының биссектрисасы *BK*-ны *M* нүктесінде қиып өтеді. *ACM* бұрышын табыңыз. (*Р. Женодаров*)

**Жауабы**: ∠*ACM* = 45°. **Шешуі**. *BAK* үшбұрышы — тікбұрышты теңбүйірлі болғандықтан, ∠*AKB* = 45°. *CAD* бұрышының биссектрисасы *BK* кесіндісін *N* нүктесінде қиып өтсін. *ANK* және *ANС* үшбұрыштары тең: *AN* ортақ, *AC* = *AK*, ∠*CAN* = ∠*KAN* . Сондықтан ∠*NCA* = ∠*NKA* = 45°. Сондықтан *CN* — *ACD* тік бұрышының биссектрисасы, ал *N* —*ACD* үшбұрышының биссектрисаларының қиылысу нүктесі. Осылайша, *N* нүктесі *ACD* бұрышының биссектрисасында жатыр және *BK* кесіндісінде жатыр, яғни *M* нүктесімен сәйкес келеді. Олай болса, ∠*ACM* = ∠*ACN* = 45°.

**4.** Кубтың төбелеріне 12, 22, …, 82  сандарын қойып шықты (әр төбесіне бір саннан). Әр қабырғасына оның аяғыжағындағы сандардың көбейтіңдісін жазды. Бұл көбейтіңділердің мүмкін болатын ең үлкен қосындысын табыңыз. (*Д. Фон-дер-Флаасс*)

**Жауабы**: 9420. **Шешуі**. Әр қабырғаның ұштарының түсі әр-түрлі түс болатыңдай, кубтың төбелерін екі түске бояп тастайық. Бір түсті төбелерде *a*1, *a*2, *a*3, *a*4  сандары тұрсын, басқа түсті төбелерде *b*1, *b*2, *b*3, *b*4  сандары тұрсын, және бір нөмерлі сандар қарама-қарсы төбелерде тұрады. Онда есептің шартында берілген көбейтіңділер қосындысы (*a*1+*a*2+*a*3+*a*4)(*b*1+*b*2+*b*3+*b*4) – (*a*1*b*1+*a*2*b*2+*a*3*b*3+*a*4*b*4)-ке тең екенің тексеру оңай. Орташалар туралы теңсіздік бойынша

(*a*1+*a*2+*a*3+*a*4)(*b*1+*b*2+*b*3+*b*4) ≤ (*a*1+*a*2+*a*3+*a*4*+b*1+*b*2+*b*3+*b*4)2/4 = (12+22+…+82)2/4 = 10404,

және теңдік мына жағдайда ғана орындалады *a*1+*a*2+*a*3+*a*4 = *b*1+*b*2+*b*3+*b*4 (1). Екінші жағынан, *a*1*b*1+*a*2*b*2+*a*3*b*3+*a*4*b*4 қосындысы , мұндағы *ai* және *bi* — 12, 22, …, 82 сандары, 82-сі 12-не, 72 -сі 22-не, 62 -сі 32-не, 52 -сі 42-не көбейтілгенде ғана минимал болады (2). Шыңында да, 82-сі *a*2 ≠ 12-не көбейтілсін, ал 12-cі *b*2-не. 82-сін 12-не көбейтіп, ал *a*2-сін *b*2-не көбейтіп, біз *a*1*b*1+*a*2*b*2+*a*3*b*3+*a*4*b*4 қосындысын кемітіп алатынымыз түсінікті. Бұдан кейін дәл солай 72-сін 22-сіне көбейтіп, қосындыны кемітіп алатынымызды көрсетеміз және дәл осылай ары қарай.

Максималдық шарт (1) пен минималдық шарттың (2) *бір уақытта* орындалуын жасауға болады: бұл үшін бір түсті төбелерге 12, 42, 62 және 72 сандарын қою керек, ал басқа төбелерге 82 және 12, 72 және 22, 62 және 32, 52 және 42 сандары қарама-қарсы төбелерде орналасатыңдай етіп қою керек. Мұндай орналастыру ізделінді ең үлкен көбейтіңділердің қосындысын беретіні түсінікті және ол (12+42+62+72)2–(82⋅12+72⋅22+62⋅32+52⋅42) = 1022–984 = 9420-ға тең. **Ескерту**. 12, 22, …, 82  сандарын қосындысы бірдей болатын екі топқа 4 саннан бөліп тастауға болатыны туралы шындық кездейсоқ емес. Кез-келген *n* үшін (*n*+1)2–*n*2 = 2*n*+1, сондықтан ((*n*+3)2–(*n*+2)2)–((*n*+1)2–*n*2) = (2*n*+5)–(2*n*+1) = 4 болатының байқап өтейік. Бұл жерден, (12–22–32+42)–(52–62–72+82) = 12–22–32+42–52+62+72–82 = 4–4 = 0.

**5.** Сөреде кез-келген ретте он том энциклопедия тұр, олар 1-ден 10-ға дейінгі сандармен нөмерленген. Егер кез-келген екі томның арасында төрт басқа том бар болса, онда осы екі томның орындарын ауыстыруға мүмкіндік берілген. Томдарды әрқашан нөмерінің өсу ретімен орналастыруға бола ма? (*Д. Храмцов*)

**Жауабы**: Иә. **Шешуі**. Кез- келген том алайық. Ол ең кем дегенде 4 томға алыстатылған, немесе бірінші тұрған томнан, немесе соңғы тұрған томнан. Сондықтан біз оны немесе бірінші орынға, немесе соңғы орынға қоя аламыз, содан кейін, егер істегіміз келсе соңғы орыннан бірінші орынға немесе керісінше істей аламыз. Ол тұру керек орын кем дегенде немесе бірінші орыннан, немесе соңғы орыннан 4 томға алыстатылғандықтан, біз келесі жүріспен оны осы орынға қоя аламыз. Суреттелген процедураны 1 мен 10-шы томнан басқа барлық томдармен жасай отырып, біз олардың бәрін өз орнына қойып тастаймыз. Осыдан кейін 1 мен 10-шы томдар шеткі болып қалады, және біз томдардың орналасуын бірден өсу ретімен аламыз, немесе шеткі томдардың орындарын ауыстыру арқылы аламыз.

**6.** Дөңес *ABCD* төртбұрышында *B* және *D* бұрыштары тең, *CD =*4*BC*, ал *A* бұрышының биссектрисасы *CD* қабырғасының ортасынан өтеді. *AD*/*AB* қатынасы қандай шамаға тең болуы мүмкін? (*С. Берлов*)

**Жауабы**: 2:3. **Шешуі**. *CD* қабырғасының ортасын *M* нүктесі арқылы белгілейік . *AB* сәулесінен, *AM* түзуіне қарағанда *D* нүктесіне симметриялы *K* нүктесін қарастырайық. ∠*ABC =*∠*ADM =*∠*AKM* болғандықтан, *BC* || *KM* және *K* нүктесі *AB* кесіндісінде жатыр. *CM = DM = KM* болғандықтан, ∠*DKC =*90° және *KC* || *AM*. Олай болса, *AKM* және *KBC* үшбұрыштарының қабырғалары сәйкесінше параллель, сондықтан олар *k = KM*/*BC =*2 коэффицентімен ұқсас, бұл жерден *AD = AK =*2*KB* және *AD*:*AB =*2:3.

**7.** Кез-келген *a*, *b*, *с* үшін,  теңдігі тек сонда және сонда ғана, егер теңдігі орындалғанда орын алатының дәлелдеңіз.

**Шешуі**. Сол жақтағы жақшаларды ашқаннан кейін және ұқсас мүшелерді біріктіргеннен кейін мына теңдіктің орындалатының көрсету оңай

 (\*).

Сондықтан, егер  болса, онда мына теңдік те орын алады . Керісінше, болсын. Егер *a+b+c* ≠ 0 болса,  теңдігі (\*)-теңдігінен шығады. Егер де *a+b+c* = 0 болса, онда

.

**8.** 100 тиын ішінде 4 жалған тиын бар. Барлық шың тиындардың салмақтары бірдей, жалған тиындардың салмақтары да бірдей, бірақ жалған тиынның салмағы жеңілдеу. Кәсе таразыда екі рет өлшеу арқылы, гірсіз, ең болмаса бір тал шың тиын қалай алуға болады? (*А. Шаповалов*)

**Шешуі**. Мүмкін бір әдісті келтірейік. 100 тиынды екі топқа (нөмері 1-ші және нөмірі 2-ші) 33 тиыннан болатыңдай, және тағы бір топта 34 тиын болатыңдай етіп бөлейік. Бірінші өлшеуде кәселерге 1-ші және 2-ші топтарды салайық. Егер кәселердің біреуі екіншісіне қарағанда ауырырақ болса, онда ол жерде жалған тиындардың саны бірден көп емес. Онда екінші өлшеу арқылы осы топтағы кез-келген екі тиынды бір-бірімен салыстыруға болады: егер екеуінің біреуі ауыр болса, онда ол шың, ал егер екеуі бірдей болса, онда екеуі де шың. Егер бірінші рет өлшегеннен кейін 33 тиыннан тұратын екі топ тең болса, онда бұл жалған тиындар үш топ бойынша мындай әдістердің біреуімен бөлінгенің білдіреді: (0,0,4), (1,1,2) немесе (2,2,0). Екінші өлшеуді былай жүргіземіз: бір топқа басқа кәседен бір тиын қосайық, ал қалған барлық тиындарды басқа кәседен алып тастап, үшінші топтағы 34 тиынмен алмастырайық. Мұндай өлшеу кезінде үш шешім болуы мүмкін. Біріншісі: 1 + 33 < 34. Бұл дегеніміз сол жақта оң жақтағыға қарағанда тиындар көп дегенді білдіреді. Олай болса, (2,2,0) жағдайы орын алады, яғни барлық 34 тиын – шың. Екіншісі: 1 + 33 = 34. Бұл сол жақтағы және оң жақтағы жалған тиындар екенің білдіреді. Олай болса, (1,1,2) жағдайы орын алады, мұнымен қатар біз екінші үймедегі жалғыз жалған тиынды бірінші үймеге ауыстырып тастадық. Онда екінші үймедегі барлық 32 тиын – шың. Үшіншісі: 1 + 33 > 34. Бұл немесе (0,0,4) жағдайы, немесе (1,1,2) жағдайының орын алатының білдіреді, және ауыстырылған тиын жалған болмайды. Екі жағдайда да ауыстырылған тиын – шың.