**Леонард Эйлер атындағы олимпиаданың дистанциондық кезеңінің бірінші туры**

**1.** *Федяда бірнеше жүктер бар. Олардың салмақтары 10 нан кіші және бүтін сандар (әр салмақ килограммда берілген). Сол жүктердің көмегімен 100, 102, 103 және 104 деген салмақтарды алуға болайтындай ал 101 мен 105 деген салмақтарды алуға болмайтындай болу мүмкін бе?*

Жауабы: Мүмкін. Мысал. (тағы да бар!). 11 жүк 9 кгнан және әрқайсысы бір жүктен 1, 3 және 4 кгдарға. Барлық керекті салмақтар жиналатының тексеру оңай. Ары қарай , 1+3+4+90 < 100 болғандықтан, 101 немесе 105 кгға салмақ жинау үшін, барлық 11 килограммдық жүктерді қолдану керек. Бірақ 2 және 6 кгға, сәйкесінше 101 және 105 кгға дейінгі жетіспейтің салмақтарды, 1, 3 және 4 кг салмақтармен жинау мүмкін емес.

**2.** *Әр 111 жанұяда үш адам бар: әкесі, анасы және баласы. Барлық 333 адам тізбекке тұрды. Әр баланың әке-шешесі баланың екі жағынан тұрғаны (олар оның дәл қасында болмау мүмкін) белгілі. Ортаңғы 111 адам ішінде кем дегенде бір бала бар екенін дәлелдеңіз.*

Шешуі. Егер қатарда, бала атаанасының сол(оң) жағында тұрса, онда атаананы *сол жақ шеткі* (*оң жақ шеткі* ) деп атайық. Барлық ортаңғы 111 адам атааналар болсын. Онда олардың ішінен не *сол жақ шеткілері,* не *оң жақ шеткілері 55*тен көп болады, яғни 56дан кем болмайды. *Сол жақ шеткілері* кем дегенде 56 болсын. Онда барлық 56 атана бастапқы 111 адамның ішінде болады, және сол жерде қалған 56 адам тұратын болады. Қарамақайшылық. 56 *оң жақ шеткілер* жағдайы дәл сол сияқты талданады.

**3.** *D нүктесі АВС тік бұрышты үшбұрышының АВ гипотинузасынан алынған, бірақ оның ортасы емес. AD, BD мен CD өзара тең емес екенін дәлелдеңіз.*

Шешуі. *AD,* *BDға* есеп шарты бойынша тең емес. *AD = CD* тең болсын. Онда, *DAC* және *ACD* бұрыштары өзара тең. Олардың әрқайсысы *x*қа тең болсын. Онда *DAB* және *ABD* бұрыштарының әрқайсысы 90°–**ке тең, бұл жерден *AD =BD = CD* — қарамақайшылық. Дәл сол сияқты , *CD,* *BD*ға тең бола алмайды.

**4.** *Бес таңбалы х саны 4 ке басталып 7 ге аяқталады, ал бес таңбалы у саны 9 дан басталып 3 ке аяқталады. х мен у дың ортақ бес таңбалы бөлгіші бар екені белгілі. 2y-x саны 11-ге бөлінетінін дәлелдеңіз*

Шешуі. *x* = *az*, *y = bz* болсын, мұндағы *z* — бес таңбалы *x* және *y* сандарының ортақ бөлгіші. Очевидно, *a* және *b* сандары тақ, *b* > *a*, *a* ≤ 4 және *b* ≤ 9. Бұдан, *a* — 1 немесе 3. Егер *a =*1 болса, онда *z* = *x*, *y = bx*, *b* ≥ 3, бірақ 3*x* > 120000 — алты таңбалы сан. Олай болса, *a* = 3. Единственная цифра, произведение которой на 3ке көбейтіңдісі 7аяқталатын жалғыз сан9 саны. Сондықтан *z* саны 9ға аяқталады. *bz* көбейтіндісі 3ке аяқталатын жалғыз бір таңбалы *b* саны 7ге тең.

Сонымен, *x* = 3*z*, *y* = 7*z*, бұл жерден 2*y–x* = 11*z*, бұдан есептің тұжырымдамасы шығады.

**5.** Әрқайсысы 2 тастан тұратын 2009 үйме берілген. Құрамындағы тастар саны жұп болатын үйменің (ондай үймелер бірнеше болса кез келгенін) жартысын басқа кез келген үймеге салуға болады. Осындай операциялар арқылы бір үймеде көп дегенде қанша тас алуға болады?

Жауабы: 2010. Шешуі. Шартта айтылған операциялар үймелер санын азайтпайды, сондықтан олардың әрқайсысында, әр кезде кемінде бір тас бар. Олай болса, бір үймеде 2009⋅2 – 2008 = 2010 санынан артық тас жинау мүмкін емес.

2010 тастан тұратын үймені қалай жинайтының көрсетейік. Екі тастан тұратын бір үйме алып, мындай түрлендірулер жүргізейік: (2,2,2,2,2) → (3,1,2,2,2) → (3,1,3,1,2) → (3,1,4,1,1) → (5,1,2,1,1). Три кучки Бір тастан үш үйме алып қояйық та, оларды екі тастан үш үйме қылып алмастырайық, және мындай түрлендірулер жүргізейік: (5,2,2,2,2) → (5,1,3,2,2) → (5,1,4,1,2) → (7,1,2,1,2). Бір тастан екі үйме алып қояйық та, оларды екі тастан екі үйме қылып алмастырайық және дәл солай мынаны аламыз  (9,1,2,1,2).Үлкен үймеде 2007 тас жиналғанда, әлі 2 тастан үш үйме қалады және бір тастан 2005 үйме қалады. Ары қарай былай істейміз: (2007,2,2,2) → (2007,1,3,2) → (2007,1,4,1) → (2009,1,2,1) → (2010,1,1,1).