Леонард Эйлер атындағы II МАТЕМАТИКАЛЫҚ ОЛИМПИАДАСЫНЫҢ 2 (аймақтық) кезеңі.

**Есептердің берілгені мен шешімі.**

***1.*** *Бір күні барон Мюнхгаузен қыдырудан келіп, жарты жолды 5 км/сағ жылдамдықпен, ал қыдыруға кеткен жарты уақытты 6 км/сағ жылдамдықпен жүрдім депті. Ол қателесіп кеткен жоқ па?* (*И. Рубанов*)

**Жауабы**. Қателесіп кетті. **Шешуі**. Егер барон қыдыруға кеткен жарты уақытты 6 км/сағ жылдамдықпен жүрсе, онда 5 км/сағ жылдамдықпен, ең көп, бұл уақыттың екінші жартысын, яғни 6 км/сағ жылдамдықпен көп емес жүрген жолды жүрді. Бірақ, бұл дегеніміз, барон 5 км/сағ жылдамдықпен жүре отырып, 6 км/сағ жылдамдықпен жүрген жолдан кем жүрді деген сөз. Олай болса, 5 км/сағ жылдамдықпен жолдың жартысынан аз бөлігін жүрді.**Ескерту**. Есептің шартында, Мюнхгаузен қыдырған кезде тек қана 5 немесе 6 км/сағ жылдамдықпен жүрді деп айтылмаған: бұл уақыттың бөлігін басқа жылдамдықтармен жүрді дегенді қарсы қылмайды.

***2.*** *Қатар келген жеті натурал санның әрқайсысын 1-ге (арртыруға немесе кемітуге) өзгертуге болса, онда өзгертілгеннен кейінгі жеті санның көбейтіңдісі бастапқы жеті санның көбейтіңдісіне тең болатыңдай қандай да бір қатар келген жеті натурал сан табыңыз. (Методкомиссия Всероссийской олимпиады)*

**Шешуі**. Мысалы, 3-тен 9-ға дейінгі сандар жарайды: 3-ті 2-ге ауыстырайық, 4-ті 5-ке, 5-ті 6-ға, ал (6, 7) және (8, 9) әр жұбының сандарын бір-біріне ауыстырайық. Ең соңында 3・4・5・6・7・8・9 = 2・5・6・7・6・9・8 екенің аламыз. **Ескерту**. Егер *m*, ..., *m*+*n*−1қатар келген *n* натурал саның әрқайсысын 1-ге олардың көбейтіңдісі сақталатыңдай өзгертсек, онда дәл осылай *n*+2 қатар келген *m*, ..., *m*+*n*–1, *m*+*n*, *m*+*n*+1 сандарымен істеуге болады: *m*, ..., *m*+*n*−1 сандардың ауыстырылуына сәйкес (*m*+*n*) ↔ (*m*+*n*+1) ауыстырылуын қолдансақ жеткілікті. Біздің шешіміміз дәл осылай құрастырылған болатын: бастапқы кезде үш бастапқы 3, 4, 5 сандары табылған болатын, ал кейін оларға 6, 7 және 8, 9 жұбының сандары қосылған болатын. Келесі жұптарды қоса отырып, біз кез-келген қатар көлемі тақ сан болатын сандар үшін мысалдарды ала аламыз. Айқын әдіспен кез-келген көлемі жұп болатын қатар келген натурал сандар үшін мысалдар құрастырылады.

***3.*** *AB = AK болатыңдай ABC тікбұрышты үшбұрышының BC гипотенузасынан K нүктесі алынған . AK кесіндісі CL биссектрисасын оның ортасында қиып өтеді. ABC үшбұрышының сүйір бұрыштарын табыңыз. (И. Богданов)*

**Жауабы**. ∠*B* = 54°, ∠*C* = 36°. **Шешуі**. *CL* биссектрисасының ортасын *P* нүктесі арқылы белгілейік, ал *ABC* бұрышын β арқылы белгілейік; онда ∠*ACL* = (90°−β)/2. *ACL* тікбұрышты үшбұрышында *AP* кесіндісі медиана болып табылады, сондықтан *AP* = *CP* = *LP*. Енді *APL* және *ABK* теңбүйірлі үшбұрыштарынан ∠*ALP* = ∠*LAP* = ∠*BAK* = 180°−2∠*ABK* = 180°−2β екені шығады. Екінші жағынан, Δ*BCL* үшбұрыштарының сыртқы бұрыштары ретінде ∠*ALP* = ∠*ABC*+∠*LCB* болады. Бұл дегеніміз, 180°−2β = β+(90°−β)/2, бұл жерден 5β/2 = 135°, яғни β = 54°. Онда ∠*ACB* = 90°−∠*ABC* = 36°.



**4*.*** *a < 1000 болатыңдай a және b натурал сандары берілген. a21 саны b10 санына бөлінсе, онда a2 саны b санына бөлінетінің дәлелдеңіз.* (*П. Кожевников*)

**Шешуі**. Біздің пайымдау дұрыс емес деп тұжырымдайық; онда *a*2 санының жіктелуіне *b* санының жіктелуіне қарағанда аз дәрежемен кіретін *p* жай саны табылады.Яғни, егер *a* саны pk санына бөлінсе, бірақ *pk*+1 санына бөлінбесе, ал *b* саны *pm* санына бөлінсе, бірақ *pm*+1 санына бөлінбесе, онда *m* > 2*k*, бұл дегеніміз, *m* ≥ 2*k* + 1. Бірақ, *b*10 санының *a*21 санына бөлінетіңдігінен 21*k* ≥ 10*m* екені шығады. Бұдан 21*k* ≥ 10(2*k* + 1), яғни *k* ≥ 10. Бірақ, *a* < 1000 < 210 ≤ *p*10 ≤ *pk*, сондықтан *a* саны *pk* санына бөліне алмайды. Қарама қайшылық.

**5.** *Незнайка шеңбер бойына 11 натурал санды жазып қойды. Әрбір екі көрші сандар үшін ол олардың айырымын есептеп қойды(үлкеннен кішісін алып тастады). Ең соңында табылған сандардың ішінен төрт тал бір саны, төрт тал екі саны және үш тал үш саны табылды. Незнайка бір жерде қателік жібергенің дәлелдеңіз.* (*Р. Женодаров*)

**Шешуі**. Егер сағат бағыты бойынша сәйкесінше жұпта үлкен сан кіші санның алдында тұрса, онда біздің әрбір айырымды қосу таңбасымен жазайық, және керісінше жағдайда алу таңбасымен жазайық. Бізде сан мен сағат бағыты бойынша оның артынан келген келесі санның айырмалары 11 тал болды; бұл сандардың барлығының қосындысы нөльге тең болады, яғни жұп санға тең. Бұл мүмкін емес, себебі олардың арасында дәл жеті тақ сан бар — 1-ге немесе -1-ге тең төрт сан, және үш сан 3-ке немесе -3-ке тең.

**6.** *Алты адамнан тұратын компанияда кез-келген бес адам дөңгелек стөл үстінде әрбір екі көрші таныс болатыңдай отыра алады. Әрбір екі көрші таңыс болатыңдай бүкіл компанияны дөңгелек стөл үстіне отырғызуға болатының дәлелдеңіз.* (*С. Волчёнков*)

**Шешуі**. Компанияда әрбіреудің үштен кем емес танысы барын байқап өтейік. Шынымен де, егер кейбіреу *X* адамы үш адамнан кем адаммен таныс болса, онда компанияда оның таныстарының біреуін алып тастасақ, біз *X* адамының бірден көп емес танысы бар, бес адам алатын едік, яғни оларды дөңгелек стөл үстіне отырғызу мүмкін емес. Енді кез-келген бесеуін алайық та оларды дөңгелек үстел үстіне отырғызайық. Алтыншы адам кем дегенде олардың үшеуімен таңыс; бұл дегеніміз ол қандай да бір жұптағы көршілес адамдармен таңыс. Егер біз алтыншысын олардың арасына отырғызсақ, онда біз керекті орналастыруды аламыз.

**7.** *n санының қандай ең үлкен мәңінде 1, 2, ..., 14 сандарын кез-келген k = 1, 2, ..., n саны үшін айырымы k болатыңдай көк сандар жұбы табылатыңдай және айырымы k болатыңдай қызыл сандар жұбы табылатыңдай, қызыл және көк түстерге бояуға болады?* (*Д. Храмцов*)

**Жауабы**. *n =*11. **Шешуі**. n ≤ 12 болатыны анық, себебі айырмасы 13 болатын тек бір ғана жұп бар. Талап етілген шарт тек *n* = 12 болғанда ғана мүмкін деп болжап көрейік. 12 саны 1-ден 14-ке дейінгі сандардың айырымы ретінде екі-ақ түрде келтіруге болады: 13-1 және 14-2. Анықтылық үшін 1саны қызыл болсын. Онда, 13 саны да қызыл, ал 2 және 14 сандары көк. Ары қарай айырмасы 11 болатын үш жұп бар: 12-1, 13-2, 14-3. 13 және 2 жұбы әртүсті, олай болса, қалған екеуі — біртүсті, сондықтан 12 саны қызыл(1 саны сияқты), ал 3 саны — көк. Осылайша 10, 9, 8 және 7 сандарының айырмасын қарастыра отырып, біз әр қадамда екі жұптан басқа барлық жұптар әртүсті екенің алып отырамыз, және сондықтан да тағы екі санның түсі өз бір рет қалыптасады. Ең соңында біз 2-ден 7-ге дейінгі сандар, 7-ні қоса алғанда көк түсті болатының аламыз, ал 8-ден 13-ке дейінгі сандар қызыл екенің аламыз. Бірақ, осындай жағдайда 6 саны не қызыл сандардың, не көк сандардың айырмасы түрінде келмейді — қарама-қайшылық. Олай болса *n* ≤ 11. Енді *n* санының 11-ге тең бола алатының көрсету ғана қалды. Мысалдардың біреуі былай көрсетіледі: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 сандары — қызыл, ал 14, 13, 11, 9, 7, 5, 3 сандары — көк(көк және қызыл сандардың орналасуы [1, 14] кесіндісіне қарағанда симметриялы). Басқа да мысалдар бар.

**8*.*** *ABCD трапециясының A және C бұрыштарының биссектрисалары P нүктесінде қиылысады,ал B және D бұрыштарының биссектрисалары P нүктесінен өзгеше, Q нүктесінде қиылысады.Егер PQ кесіндісі AD табанына параллель болса, онда трапеция теңбүйрлі екенің дәлелдеңіз.* (*Л. Емельянов*)



**Шешуі**. *X* нүктесінен *YZ* түзуіне дейінгі ара қашықтықты ρ(*X*,*YZ*) арқылы белгілейік. *P* нүктесі *C* бұрышыың биссектрисасында жатқандықтан, ρ(*P*,*BC*) = ρ(*P*,*CD*) екенің аламыз. Дәл солай сияқты, ρ(*Q*,*AB*) = ρ(*Q*,*BC*). Бірақ, *QP* || *BC* болғандықтан, ρ(*Q*,*BC*) = ρ(*P*,*BC*) екенің аламыз, бұл жерден ρ(*Q*,*AB*) = ρ(*P*,*CD*) (сур. қара). Дәл солай сияқты, ρ(*P*,*AB*) = ρ(*P*,*AD*) = ρ(*Q*,*AD*) = ρ(*Q*,*CD*). *AB* және *CD* бүйір қабырғаларын S нүктесінде қиылысқанға дейін созайық. *P*′ нүктесі *A*S*D* бұрышының ℓ биссектрисасына қарағанда *Q* нүктесіне симметриялы нүкте болсын. Онда симметриялықтан ρ(*P*′,*CD*) = ρ(*Q*,*AB*) = ρ(*P*,*CD*) және ρ(*P*′,*AB*) = ρ(*Q*,*CD*) = ρ(*P*,*AB*) екені шығады. Сонымен, *P* және *P*' нүктелері *A*S*D* бұрышының ішіндегі, *AB* және *CD* түзулеріне параллель және ол түзулерден сәйкесінше ρ(*P*,*AB*) және ρ(*P*,*CD*) қашықтықта жатқан түзулерде жатады. Бұл түзулер параллель болмағандықтан, олардың қиылысу нүктесі біреу ғана; бұл дегеніміз, *P*' = *P*, *P* және *Q* нүктелері *A*S*D* бұрышының биссектрисасына қарағанда симметриялы және ℓ ⊥ *PQ* || *AD*. Сонымен, S*AD* үшбұрышында биссектриса биіктік болып келеді, ал табан жағындағы бұрыштар тең, яғни *ABCD* трапециясы — теңбүйірлі.