**Леонард Эйлер атындағы олимпиаданың дистанциондық кезеңінің үшінші туры**

**1**. *Екі сан жазылды – бірінші және екінші. Бірінші санға екіншісін қосты үшінші сан пайда болды, екіншіге үшіншісін қосты төртінші сан пайда болды т.с.с. Алғашқы алты санның қосындысы 2008 ға тең. Бесінші сан нешеге тең?*

Жауабы. 502. Шешуі. Бірінші сан *a* болсын, ал екіншісі — *b* болсын. Онда үшінші сан *a+bға* тең, төртінші — *a*+2*b*, бесінші — 2*a*+3*b*, алтыншы — 3*a*+5*b*, ал барлық алты саннын қосындысы — 8*a*+12*b*. Сонымен, бесінші сан алты саннын қосындысының төрттен біріне тең, яғни 2008:4 = 502.

**2*.*** *Сырттан қарағанда бірдей, төрт тиынның үшеуі — шын және салмақтары тең, ал төртіншісі – жалған, оның салмағы шын тиынның салмағынан басқа. Екі не одан көп тиынның салмағын дәл білуге болатын өлшеуіш таразы бар. Бір тиынның нақты салмағын білуге болмайды. 4 рет өлшеу жүргізіп жалған тиынды табу керек және ол шын тиынға қарағанда ауыр ма жеңіл ма екенін анықтау керек.*

Жауабы. **Бірінші әдіс.** Таразыға тиын қойып, оны қалған әрбір үш тиынмен салыстырайық. Егер балық өлшеулер бір нәтиже берсе, онда бірінші тиын жалған және оның шың тиыннан үлкен бе әлде кіші ме екенін білу үшін, төртінші өлшеумен екі шың тиын өлшеу керек. Бір өлшеу басқа екеуінікі сияқты нәтиже бермесе, онда сол өлшеуде, біріншісіне қосқан тиынөтірік тиын, ал ол шың тиыннан ауыр немесе жеңіл екенін осы өлшеудегі салыстыру мен басқа екі салыстырудын нәтижесі береді.

**Екінші әдіс.**Тиындарды үштен өлшейтін боламыз. Жалған тиын қатысатын үш өлшеу бір нәтиже береді, ал тағы бір ол қатыспайтын өлшеуде екінші нәтиже береді. Егер бұл нәтиже қалған үш өлшеудің нәтижесінен кіші болса, онда жалған тиын шың тиыннан ауыр, егер кіші болса жеңіл.

**3.** *Тік бұрышты үшбұрышта гипотенузаға түсірілген биіктік гипатенузадан төрт есе қысқа. Үшбұрыштын сүйір бұрыштарын табыңыз.*

Жауабы. 15 және 75 градус. Шешуі. *ABC* — *С* бұрышы тік болатыңдай берілген үшбұрыш болсын. *CM* медиананысы *AB* гипотенузасының жартысына тең. *CH* биіктігі берілгені бойынша *AB*/4ке тең. Олай болса тікбұрышты *CHM* үшбұрышында, *CM* гипотенуза *CH* катетінен екі есе ұзын. Олай болса , *CMH* бұрышы 30 градусқа тең, ал сыбайлас бұрыштары (ол *BMC* бұрышы болсын) 150 градустан. Бұл бұрыш теңбүйірлі *BMC* үшбұрышының төбесіндегі бұрышы болғандықтан, ∠*ABC =*∠*MBC* = (180°–∠*BMC*)/2 = 15°, бұл жерден жауапта шығады.

**4.***Б өзені арқылы К мен М пунктер арасында жылдамдықтары бірдей және бірқалыпты қозғалатын бірнеше қайықтар жүзіп жүр. Әр қайық әр пунктта келесі пунктқа жүзіп өтуге кететін уақыт бойы тұрады. Саяхатшы әр пунктен қайықтар бірдей уақыт аралығында жөнеліп тұратынын байқады және оның қайығы айлақтардың біруіне басқа жағадан қайық келген кезде жөнелтілді. Барлық қайықтар саны төртке бөлінетінін дәлелдеңіз.*

Шешуі. Қайықтар жағалаудан *t* минут айырмашылығымен шығып отырсын, және көлді *T* минутта жүзіп өтсін, ал саяхатшы қайығы жағалауда тұрған кезде, бұл жағалауға басқа *n* қайық жетті. Бұл қайықтардың ең соңғысы, саяхатшының шыққан уақытында жетсе, онда *T* = *nt* болады. Екінші жағынан, әрбір қайық берілген айлақтардан, мысалы К айлағынан, 4*T* уақыт айрмашылығымен шығады: *T* жөңелтуге , *T* Mдегі тұрғынға, *T* қайта жөңелтуге, және *T* келесі жөңелтуге тұрғынға. Олай болса, барлығы 4*T*/*t* = 4*n* паром жұмыс істейді .

**5.** *Тақтада 8 қиылыспайтын шеңбер салынды және әрқайсысынан қалған жетеуінің арасынан сол шеңберден кіші болмайтын барлық шеңберлерге тілше жүргізді.Барлығы 33 тілше жүргізілді. Салынған шеңберлер арасында үшеуі тең екенін дәлелеңіз.*

Шешуі. Шеберлерді радиустардың өсу реті бойынша нөмерлейік(радиустары тең шеңберлерді емінеркін орнатамыз. Онда әрбір шеңберден нөмерлері барлық кіші шеңберлерге тілшелер жүргізілген: сегізіншіден — 7 тілше, жетіншіден — 6 тілше, және тағы солай ары қарай. Осындай барлық тілшелер саны 7+6+5+4+3+2+1 = 28. Оларды қызыл түске бояйық, ал қалған 5 тілшені — көкке.

Шеңберлердің тілшелері қарамақарсы болғанда ғана олардың радиустары тең екенін байқап өтейік. Кез келген екі шеңбер бір қызыл тілшемен байланысқандықтан, бұл көк түспен байланысқан шеңберлер тең дегенді білдіреді.

Шеңберлердің ішінде тең үш шеңбер жоқ деп алайық. Онда әрбір шеңбер бірден артық болмайтын басқа шеңбермен көк тілшемен (кіретін немесе кірмейтін) байланысқан.

Онда көк тілшелер 8:2 = 4тен көп емес. Қарамақайшылық