Математикадан ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР атындағы IV олимпиада

Аймақтық кезең

**28 қаңтар 2012 ж.**

**Есептер мен олардың шешімі.**

**Екінші күн.**

**5.** Кез келген екеуінің көбейтіндісі бүтін, ал кез келген үшеуінің көбейтіндісі бүтін емес болатын 10 әр түрлі рационал сандар бар ма? Рационал сан деп, екі бүтін санның қатынасы ретінде келген санды айтамыз.

**Жауабы**. Жоқ. **Шешуі**. Осындай сан табылды деп болжайық. Оның ішінен кезкелген үшеуін қарастырайық: *a*, *b*, *c*. Онда *ab*, *bc*, *ca* сандары бүтін, ал *abc*= *p*/*q*саны бүтін емес. Онда (*abc*)2 = *p*2/*q*2саны да бүтін емес. Бірақ, (*abc*)2 = (*ab*)(*bc*)(*ca*) —саны бүтін. Қарамақайшылық.

**6.** Шеңбер бойымен ақ пен қара шарлар қойылған, және де қара шарлардың саны ақ шарлардан екі есе көп. Көрші шарлар жұптарының ішінде бір түсті жұптар саны әр түрлі түсті жұптар санынан үш есе көп. Ең аз дегенде қанша шар қойылуы мүмкін?

**Жауабы.** 24. **Шешуі**. Қара шарлардың саны ақ шарлардан екі есе көп болғандықтан шарлардың барлық саны үшке бөлінеді. Шарлардың барлық санын *n* деп белгілейік. Барлық щарлар қатар келетін бір түсті шарлармен алмасып келетін топтарға бөлінеді (топ бір шардан тұруы мүмкін). Топтардың түсі алмасып келгендіктен, топтардың жалпы саны жұп. Әр түсті топтардың жалпы саны *k*ға тең болсын. Онда, көршілес әр түсті шарлар жұптары *2k* болады, ал бір түсті шарлар жұптары *n-2k* болады. Есептін шарты бойынша *n* – 2*k* = 3⋅2*k* екенін аламыз. Бұл жерден *n=8k*.Олай болса шарлардың жалпы саны Олай болса шарлардың жалпы саны 3де, 8де бөлінеді. Олай болса *n,* 24ке бөлінеді, сол үшін n24. Бұған мысал ретінде 8 ақ және 16 қара шардан тұратын кез-келген шеңберді қарастыруға болады, бұл жерде үш-үштен келген қара және ақ топтар. Мысалы қара ақ қара ақ алты қара он төрт ақ.

**7.** Қатарға әр түрлі 1000 оң сан өсу ретімен жазылған. Вася осы сандарды 500 көрші жұптарына бөліп, әр жұптағы сандардың қосындысын тапты. Ал Петя болса, әр жұптағы екі санның арасында дәл үш сан болатындай осы сандарды 500 жұпқа бөлді және ол да әр жұптағы сандардың қосындысын тапты. Петя тапқан қосындылардың көбейтіндісі Вася тапқан қосындылардың көбейтіндісінен үлкен екенін дәлелде.

**Шешуі**. *Лемма*. *a* < *d*, ал *b* < *c*. Онда (*a+b*)(*c+d*) < (*a+c*)(*b+d*) болады. *Дәлелдеуі*. (*a+c*)(*b+d*) – (*a+b*)(*c+d*) = *ab+cd–ac–bd* = (*a–d*)(*b–c*) > 0.

*Есептің шешуі*. Барлық мың санды қатар келген 125 сегіздікке бөліп тастайық. Бірінші сегіздікті алайық: *a*1 <  …< *a*8. Васяда ол *a*1+*a*2, *a*3+*a*4, *a*5+*a*6, *a*7+*a*8 қосындыларын береді, ал Петяда *a*1+*a*5, *a*2+*a*6, *a*3+*a*7, *a*4+*a*8 қосындыларын береді.Лемма бойынша (*a*1+*a*2)(*a*5+*a*6) < (*a*1+*a*5)(*a*2+*a*6) және (*a*3+*a*4)(*a*7+*a*8) < (*a*3+*a*7)(*a*4+*a*8). Енді осы затты 124 сегіздікке істеп шығу керек және қалған теңсіздіктерді көбейтіп шығу керек.

**Ескерту**. Бұған дейінгі біз қолданған лемма, *транстеңсіздігі* деп аталады.

**8.** Дөңес *ABCD* төртбұрышында *ABC* мен *ADC* бұрыштары тік. *KLMN* — тіктөртбұрыш болатындай *AB*, *BC*, *CD*, *DA* қабырғаларынан сәйкесінше *K,* *L*, *M,* *N* нүктелері алынған. *AC* диагоналінің ортасы *KL* мен *MN* түзулерінен тең қашықтықта орналасқанын дәлелде.

**Шешуі**. *KT* || *BC* и *NT* || *CD* болатын *KNT* үшбұрышын қарастырайық. Ол *LMC* үшбұрышымен *KN = LM* қабырғасы және екі көрші қабырға арасындағы бұрыштар бойынша тең. Олай болса , *KT* = *LC,* және *KTCL* — параллелограмм, бұл жерден *TC* || *KL* және *TC* ⊥ *KN*. *S* мен *O* — *AT* және *AC* кесінділерінің сәйкесінше ортасы болсын, ал *n* — *KN* кесіндісінің орта перпендикуляры болсын. ∠*ANT* = ∠*ADC* = 90° және ∠*AKT* = ∠*ABDC* = 90°, *NS = KS = AT*/2 болғандықтан, S нүктесі *K* және *N* нүктелерінен бірдей арақашықтықта жатады. *AC* түзуі *TC* түзуімен сәйкес келсін дейік. Онда *AC* түзуі *KN*ге перпендикуляр және *S* нүктесі арқылы өтеді. Олай болса, *AC* = *n*. *AC* және *TC* түзулері әр түрлі болсын. Онда, *SO* — *ATC* үшбұрышының орта сызығы. Олай болса, *SO* = *n*. Екі жағдайда да *O*нүктесі *n*орта сызығында жатады, ал түзуінің барлық нүктелері *KL* және *MN* түзулерінен бірдей арақашықтықта жатады.