X МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 21-24 марта 2018 г.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Первый день.***

**1.** Петя загадал натуральное число *N*, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа *N*+1, затем сумму цифр числа *N*+2 и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число? (М. Дидин)

**2.** Найдите наименьшее натуральное *k* такое, что для некоторого натурального числа *a*, большего 500 000, и некоторого натурального числа *b* выполнено равенство . (И. Богданов)

**3.** Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* равны и пересекаются в точке *K*. Внутри треугольников *AKD* и *BKC* выбрали точки *P* и *Q* соответственно так, что *KAP* = *KDP* = *KBQ* = *KCQ*. Докажите, что прямая *PQ* параллельна биссектрисе угла *AKD*. (С. Берлов)

4. В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа *a* среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших *a*, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём *огромным*. Каково наименьшее возможное количество огромных чисел? (С. Берлов)

X МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 21-24 марта 2018 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Второй день.***

**5.** Целые числа *a*, *b*, *c* и натуральное число *n* таковы, что *a*+*b*+*c* = 1 и *a*2+*b*2+*c*2 = 2*n*+1. Докажите, что *a*3+*b*2–*a*2–*b*3 делится на *n*. (Н. Агаханов)

**6.** Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число *M*?» (*M* может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца? (О. Подлипский)

**7.** Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом. (И. Рубанов)

**8.** Вершина *F* параллелограмма *ACEF* лежит на стороне *BC* параллелограмма *ABCD*. Известно, что *AC* = *AD* и *AE* = 2*CD*. Докажите, что *CDE* = *BEF*. (А. Кузнецов)