XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 24-27 марта 2020 г.

***Первый день.***

**1.** На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных. (С. Берлов)

**2.** В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть *популярной*. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят. (С. Берлов; 14)

**3.** Дан треугольник *ABC*, в котором 2Ð*B*– Ð*A* = 180°. Внутри него выбрана точка *K*, а на его стороне *AB* — точка *L* ≠ *B* так, что Ð*ACK* = 2Ð*BCK* и *BK* = *KL*. Докажите, что *CK*+*AL* = *AC*. (И. Богданов; 3)

**4.** Натуральные числа *a*1, *a*2, …, *ak* (*k* < 2020) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных. (С. Кудря, модификация)

XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 24-27 марта 2020 г.

***Второй день.***

**5.** Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что *целая часть* [*x*] числа *x* — это наибольшее целое число, не превосходящее *x* (например, [1,3] = 1), а *дробная часть* {*x*} числа *x* задается формулой {*x*} = *x*–[*x*]. (М. Дидин; 74)

**6.** На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник. (С. Берлов; 63, упрощение)

**7.** Дано натуральное число *n*. Множество *A*, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа *m*, не превосходящего *n*, во множестве *A* есть число, делящееся на *m*. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества *A*? (А. Кузнецов; 39)

**8.** В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». *Словом* считается любая последовательность из 2*n* букв У и 2*n* букв Ы (число *n* дано и фиксировано). Языковеды называют слова *похожими*, если одно можно получить из другого **одной** перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи?

В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от *n*. (Д. Белов, И. Богданов; 12)