XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 27–30 марта 2023 г.

***Первый день.***

**1.** На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?

**2.** Точка *N* — середина стороны *AD* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, а точка *M* на стороне *AB* такова, что *CM* ⊥ *BD*. Докажите, что если *BM* > *MA*, то 2*BC*+*AD* > 2*CN*.

**3.** Среди натуральных чисел *a*1, …, *ak* нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем *k* может случиться, что все квадратные уравнения *aix*2+2*ai*+1*x*+*ai*+2 = 0, где 1 ≤ *i* ≤ *k*–2, не имеют корней?

**4.** В 2*n* бочках налито 2*n* различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на *n* пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть *n* пустых пробирок. За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?