XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

31 января 2024 г.

---

8 класс

Первый день

1. Первоначально имеется один кусок сыра. Разрешается взять любой кусок сыра и проделать с ним одну из трех операций: разделить его на два куска одинакового веса, 11 кусков одинакового веса или 23 куска одинакового веса. Можно ли, используя только эти операции, разделить его на 2024 части одинакового веса?

2. У Олега есть набор из клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить (без наложений и пробелов) какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

3. На сторонах AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки K, L, M соответственно так, что $AK = 1$, $BL = 2$, $CM = 3$. Известно, что $\angle MKL = 60°$. Найдите сторону треугольника ABC.

4. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

5. Какие натуральные числа можно представить в виде $a^2+2023b^2-2024c^2$, где a, b, c — различные целые числа?

XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

1 февраля 2024 г.

---

8 класс

Второй день

6. Найдутся ли такие 15 идущих подряд целых чисел, что сумма четырех наименьших из них равна сумме одиннадцати остальных?

7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?

8. По окружности расставили 2023 числа, наименьшее из которых равно 0, а наибольшее равно N. Для каждых двух чисел, стоящих на окружности рядом, на доску выписали их сумму. Оказалось, что любые два числа на доске отличаются не более чем на 1. Каково наибольшее возможное значение N?

9. Внутри треугольника ABC выбрана точка K такая, что $\angle KCB+\angle ACB = \angle KBC+\angle ABC = 120°$. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q таким образом, что $BK = BP$ и $CK = CQ$. Докажите, что $BQ = CP$.

10. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме находящейся в центре T, отмечены. Назовём множество отмеченных точек *линейным*, если все его точки лежат на одной прямой, параллельной стороне треугольника T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств?