**Первый тур дистанционного этапа XI олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.** *Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140, и т.д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти такую клеточку, что сумма пяти чисел, находящихся в ней и четырёх клеточках, соседних с ней по сторонам, равна 2018?* (Автор задачи ⎯ А. Солынин)

Ответ. Нельзя. Решение. Из построения понятно, что если в клеточке записано число *x*, то сверху от него записано число *x*−70, снизу ⎯ число *x*+70, слева ⎯ число *x*−1, справа ⎯ число *x*+1. Сумма пяти этих чисел равна 5*x*, то есть делится на 5, а число 2018 на 5 не делится.

**2.** *За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.* (В. Мигрин)

Ответ. 0 или 50. Решение. *Оценка*. Допустим, среди сидящих есть лжец. Тогда справа от него — рыцарь или чудак. Любой из них в этой ситуации скажет правду, значит, справа от него — снова лжец и т.д., то есть лжецов — ровно 50. *Примеры*. На 0 лжецов: за столом одни чудаки, и каждый может соврать, что справа от него сидит лжец. На 50 лжецов: за столом на четных местах сидят лжецы, а на нечетных — чудаки или рыцари (в любом раскладе).

**3.** *В трапеции ABCD боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M ⎯ середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что BE = CE.* (А. Кузнецов)

Решение. Достроим треугольник *ABC* до параллелограмма *ABCF*. Его диагональ *BF* проходит через точку *M*, а, значит, и через точку *E*. Так как *CF* = *AB* = *BD*, и прямая *CF* будучи параллельной прямой *AB*, не параллельна прямой *BD*, *BCFD* — равнобедренная трапеция. Ее диагонали *BF* и *CD* образуют равные углы с основанием *BC*. Следовательно, треугольник *BEC* — равнобедренный с основанием *BC*, что и требовалось доказать.

**4.***На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод» вместе.* (А. Солынин)

Первое решение. Пусть на стоянке всего *C* машин, среди которых *T* «Тойот», *H* «Хонд» и *S* «Шкод», а также *X* красных и *Y* желтых. По условию *C*–*H* = 3(*C*–*X*)/2, *C*–*S* = 3(*C*–*Y*)/2, *C*–*T* = (*X*+*Y*)/2. Сложив два первых равенства, после приведения подобных получаем: –*H*–*S* = *С*–3(*X*+*Y*)/2, откуда *H*+*S* = –*С*+3(*C*–*T*)  3*T*+*H*+*S* = 2*С*. Заменив в правой части последнего равенства *C* на *H*+*S*+*T*, мы не увеличим ее и получим неравенство 3*T*+*H*+*S* ≥ 2*H*+2*S*+2*T*  *T* ≥ *H*+*S*, что и требовалось доказать. Второе решение. Так как красных и жёлтых машин вместе не больше, чем всего машин на стоянке, не «Тойот» на стоянке не больше половины от общего числа машин. Значит, «Тойот» ⎯ не меньше половины общего числа машин. Так как «Хонды» и «Шкоды» ⎯ явно не «Тойоты», их не больше половины от общего числа машин, откуда и следует утверждение задачи.

**5.** *Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.* (Н. Власова)

Решение. Не совершая перелета, кузнечик может попасть из клетки *K*, где он находится, только в клетки прямоугольника, где *K* — левая верхняя клетка. Покрасим красным 10 клеток, лежащих на диагонали квадрата, идущей из правой верхней клетки в левую нижнюю. Прямоугольник, в левом верхнем углу которого находится красная клетка, не содержит других красных клеток. Поэтому, двигаясь только вниз или вправо, кузнечик не сможет попасть из одной красной клетки в другую, не совершив перелета, из чего и вытекает утверждение задачи.