**Второй тур дистанционного этапа XII олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.** *Каждую клетку доски 7×7 закрасили в один из девяти цветов. Известно, что у каждой клетки, не примыкающей к краю доски, есть соседи (по горизонтали, вертикали или диагонали) всех восьми цветов, не совпадающих с цветом этой клетки. Докажите, что клеток каждого из девяти цветов не меньше четырех.* (По мотивам задачи Р. Женодарова)

Решение. Рассмотрим четыре квадрата 3×3, лежащие в углах доски. Центр каждого из них покрашен в какой-то цвет и граничит с клетками, покрашенными во все остальные цвета. Поэтому в каждом из четырех квадратов есть клетки всех девяти цветов. Поскольку эти квадраты не пересекаются, клеток каждого цвета не менее 4.

**2.** *Вася знает, что Петя задумал натуральное число, не большее 4. Вася может указать любое натуральное число или несколько чисел и спросить Петю, есть ли задуманное число среди них (например: «Верно ли, что задуманное число равно 2?» или «Верно ли, что задуманное число равно 2 или 3?»). Петя должен ответить «Да» или «Нет». Как Васе за 11 вопросов узнать задуманное число, если Петя в ответ может и соврать, но не больше трех раз?* (И. Рубанов по фольклорным мотивам)

Решение. Пусть Вася сначала задает вопрос: «Задуманное число равно 3 или 4?» до тех пор, пока не получит четыре одинаковых ответа. Очевидно, эти четыре ответа могут быть только правдивыми. Если они положительны, то дальше Вася может задавать вопрос: «Это число 3?», пока не получит четыре одинаковых ответа. Если они положительны, задумано число 3, если отрицательны — число 4. Случай, когда верный ответ на первый вопрос отрицателен, разбирается аналогично (Вася может задавать вопрос: «Это число 2?»). Вася задал не более 11 вопросов, потому что он получил ровно 8 верных ответов, а неверных — не больше трёх.

**3.** *Напомним, что* ***факториалом*** *n! натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (например, 1! = 1, а 5! = 1⋅2⋅3⋅4⋅5). Можно ли из чисел 1!, 2!,…, 99!, 100! вычеркнуть одно так, чтобы произведение оставшихся оказалось кубом натурального числа?* (И. Рубанов)

Ответ. Нельзя. Решение. Если произведение оставшихся факториалов — куб натурального числа, то для любого простого числа степень, в которой оно входит в это произведение, должна делиться на 3. Простое число 97 входит ровно в четыре факториала: от 97! до 100!, и в каждый — в первой степени. Поэтому вычеркнут должен быть один из этих четырех факториалов. Но тогда простое число 89 будет входить ровно в 11 факториалов: от 89! до 100!, исключая вычеркнутый. Противоречие.

**4.***Точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC за точки B и C соответственно. Точки M и N — середины отрезков AE и DC. Докажите, что MN > AD/2.* (И. Рубанов)

Решение. Пусть *L* и *K* — середины сторон *AB* и *AC* соответственно. Так как средние линии *KL* и *KM* треугольников *ABC* и *ACE* параллельны одной и той же прямой *BC*, а точки *L* и *M* лежат по разные стороны от прямой *AC*, точка *K* лежит на отрезке *LM*. Заметим, что Ð*NKM* = Ð*NKC*+Ð*CKM* = Ð*BAC*+Ð*BCA* = 180°–Ð*ABC* > 90°. Поэтому *MN* — самая длинная сторона в треугольнике *MKN*. В частности, *MN* > *KN* = *AD*/2, что и требовалось доказать.

**5.** *На экране компьютера горит число, а на пульте компьютера есть две кнопки. Нажатие на одну из кнопок переводит число n, написанное на экране, в 2n–1, а на другую — в 2n+1. Пока оператор отсутствовал, хулиган Вася подкрался к пульту и произвёл сто несанкционированных нажатий на кнопки. Докажите, что по числу, которое теперь горит на экране, оператор (знающий, сколько раз Вася нажимал на кнопки и какое число было на экране до прихода Васи) сможет определить, в каком порядке Вася нажимал на кнопки, если число, горевшее вначале на экране:* ***а)*** *целое;* ***б)*** *произвольное.* (А. Голованов)

Решение. а) Очевидно, после любого нажатия кнопки целое число на экране превращается в нечётное. Пусть после *s*-го нажатия кнопки на экране горит число *m* = 2*k*+1. Тогда после (*s*+1)-го нажатия на экране окажется либо число 2(2*k*+1)–1 = 4*k*+1, либо число 2(2*k*+1)+1 = 4*k*+3. Эти случаи легко различить, найдя остаток от деления числа на экране на 4. Таким образом, по числу после (*s*+1)-го нажатия мы можем найти как число после *s*-го нажатия, так и кнопку, которую Вася нажимал в (*s*+1)-ый раз. Проделав эту процедуру 99 раз, мы узнаем, в каком порядке Вася нажимал кнопки со второго по 100-ый раз, а также какое число получилось у него после первого нажатия. Зная его и исходное число на экране, мы выясним и то, какую кнопку Вася нажимал в первый раз.

б) Заведем у компьютера второй экран, на котором исходно горит число 0. Пусть на первом экране — число *x*. Легко видеть, что если после *k* нажатий на втором экране горит число *s*, то на первом — число 2*kx*+*s*. Поэтому если вычесть из итогового числа на первом экране число 2100*x*, то мы получим число на втором экране, по которому мы восстановим последовательность нажатий кнопок как в пункте а.