X МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 2 день**

**6.** *На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?* (Методкомиссия)

**Ответ**. 39…998 (223 девятки). **Решение**. Так как 2018 = 9⋅224+2, самым маленьким числом с суммой цифр 2018 будет 29…9 (224 девятки), а вторым по величине — число 389…9 (223 девятки) В 223 следующих по величине числах с суммой цифр 2018 восьмёрка «путешествует» из начала в конец ряда девяток, каждый раз смещаясь на один знак. Через 223 шага она окажется в конце числа, что и даёт нам ответ.

**7.** *В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник.* (И. Рубанов)

**Решение**. Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивалось на 1, в полночь на столе лежал 61 многоугольник. Допустим, у каждого из этих многоугольников было не меньше пяти вершин. Тогда всего вершин у многоугольников на столе в полночь было по крайней мере 5⋅61 = 305. Но при каждом разрезании суммарное число вершин увеличивалось на 2 (если разрез проходил через две вершины), 3 (если разрез проходил через одну вершину и одну точку внутри стороны) или 4 (если разрез проходил через две точки внутри сторон). Поэтому общее число вершин за 51 разрезание могло увеличиться не больше, чем на 51⋅4 = 204, и потому суммарное число вершин в полночь не превосходило 100+204 = 304. Противоречие.

**8.** *На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что ∠BAC = 2α, ∠ADC = 3α, ∠ACB = 4α. Докажите, что BC+CD = AB.* (А. Кузнецов)

**Решение**. На продолжении отрезка *BC* за точку *C* выберем точку *E* так, что *CD* = *CE*. Тогда *ACD* = 180–*DAC*–*ADC* = 180–4α = *ACE*. Следовательно, треугольники *ACD* и *ACE* равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому *AEC* = *ADC* = 3α и *CAE* = *CAD* = α. Заметим, что *BAE* = *BAC*+*CAE* = 3α = *AEB*. Таким образом, треугольник *ABE* равнобедренный и *AB* = *BE* = *BC*+*CE* = *BC*+*CD*.

**9.** *На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?* (С. Берлов)

**Решение**. *Оценка*. Заметим, что если в строчке закрашено 9 клеток, то можно перекрасить четыре из них так, чтобы никакие две закрашенные клетки не были соседними: достаточно перенумеровать закрашенные клетки слева направо и перекрасить клетки с чётными номерами. Если сделать такие перекрашивания со всеми чётными строками, то перекрасится 48 клеток и не будет закрашенных квадратов 2×2, поскольку не будет двух соседних закрашенных клеток в одной чётной строке.

*Пример*. Закрасим расположенные вдоль главной диагонали непересекающиеся квадраты: первый со стороной 9 и два со стороной 8 — и клетки, расположенные по незакрашенной главной диагонали квадрата 16×16, содержащего квадраты 8×8. Тогда на доске можно будет выделить 48 не пересекающихся квадратов 2×2, все клетки которых закрашены. Поэтому в этом примере надо перекрасить не менее 48 клеток.

**10.** *Докажите, что существует натуральное число n, большее 10100, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.* (Р. Салимов)

**Решение**. Обозначим через *S*(*n*) сумму всех простых чисел, меньших *n*. Заметим, что

*S*(*n*) < 1+2+…+(*n*–1) = *n*(*n*–1)/2 < *n*(*n*–1) (\*).

Рассмотрим два последовательных простых числа *q* > *p* > 10100. Допустим, *S*(*p*) не взаимно просто с *p*, а *S*(*q*) не взаимно просто с *q*. Тогда *S*(*p*) делится на *p*, а *S*(*q*) делится на *q*. Пусть *S*(*p*) = *kp*. Из неравенства (\*) вытекает, что *k* < *p*–1. Тогда, так как *S*(*q*) = *S*(*p*)+*p* = *p*(*k*+1), и *S*(*q*) делится на *q*, имеем *k*+1 ≥ *q*. Но *k* < *p*–1 < *q*–1. Противоречие.